

Ēriks Priednieks

# ELEKTRISKO ĶĒŽU VIENĀDOJUMI

RTU Izdevniecība  
Rīga 2019

RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE

Energētikas un elektrotehnikas fakultāte  
Industriālās elektronikas un elektrotehnikas institūts  
Elektrotehnikas un elektronikas katedra

Ēriks Priednieks

# Elektrisko ķēžu vienādojumi

Mācību grāmata

RTU Izdevniecība  
Rīga 2019

**Ēriks Priednieks. Elektrisko ķēžu vienādojumi.** Mācību grāmata.  
Rīga, RTU Izdevniecība, 2019. 175 lpp.

Mācību grāmata paredzēta Rīgas Tehniskās universitātes bakalaura studiju programmas “Elektrotehnika un elektronika” studentiem elektrisko ķēžu teorijas apgūšanai. Grāmatā iepazīšanās ar elektrotehnikas jautājumiem sākas gandrīz no pašiem pamatiem, tiek aplūkoti elektriskie lielumi, aizvietošanas shēmas un septiņi tabulas vienādojumi, līdzstrāvas un maiņstrāvas ķēdes, vektoru diagrammu un simboliskā metode un pārejas procesi. Grāmatā piedāvāta formulu tabulu ar septiņiem pamatvienādojumiem un to modifikācijām un parādīts, kā to izmantot, lai sastādītu vienādojumu nezināmai shēmai. Mācību līdzeklī sniegts galveno ideju skaidrojums, uzdevumu risināšanas plāni, algoritmi un metodes. Katras nodaļas beigās ir pašpārbaudes jautājumi.

Redaktore	Irēna Skārda
Zinātniskā konsultante	Zane Broka
Datorsalikums	Jekaterina Lukina
Vāka dizains	Paula Lore

Vāka attēls no *Shutterstock.com*

Izdevējs	RTU Izdevniecība
	Kaļķu iela 1, Rīga, LV-1658
	Tālrunis 67089123
	E-pasts: izdevnieciba@rtu.lv

© Ēriks Priednieks, 2019  
© Rīgas Tehniskā universitāte, 2019

<https://doi.org/10.7250/9789934220494>

ISBN 978-9934-22-048-7 (print)

ISBN 978-9934-22-049-4 (PDF)

# Saturs

Priekšvārds.....	7
Grāmatā lietotie apzīmējumi .....	10
1. NODAĻA. Aizvietošanas shēmu vienādojumi .....	11
Elektrisko ķēžu klasifikācija .....	11
Elektrisko ķēžu aizvietošanas shēmas .....	12
Aizvietošanas shēmu elementi .....	12
Elektriskie lielumi .....	13
Pirms oficiālās daļas.....	14
Par septiņiem aizvietošanas shēmu vienādojumiem .....	16
Strāvu un spriegumu apzīmēšana shēmā.....	16
Četru elementu vienādojumi .....	17
Elektrisko ķēžu topoloģija .....	18
Spriegumu skaits shēmā .....	18
Ko uzskatīt par punktu .....	19
Aizvietošanas shēmu topoloģijas pamatjēdzieni .....	20
Kā izmanto shēmu topoloģijas pamatjēdzienus.....	21
Vienkāršākie slēgumu veidi (vingrinājums) .....	21
Spriegumu un strāvu vienādojumi .....	22
Spriegumu vienādojumu sastādīšana .....	22
Kirhofa spriegumu vienādojums .....	23
Kirhofa strāvu vienādojums .....	24
Divpola momentānā jauda .....	25
Kopsavilkums: formulu tabula .....	26
Aģitācija trīs formulu lietošanai.....	27
Pašpārbaudes uzdevums.....	29
2. NODAĻA. Līdzstrāvas ķēdes.....	30
Līdzstrāvas ķēžu vienādojumi .....	30
Elementu vienādojumi .....	31
Spriegumu vienādojumi .....	32
Kirhofa spriegumu vienādojums .....	33
Strāvu vienādojums (Kirhofa pirmais likums .....	34
Divpola jaudas formulas .....	34

Līdzstrāvas ķēžu ar vienu avotu aprēķins .....	35
Ekvivalenti pārveidojumi līdzstrāvas ķēdē.....	35
Divas vienkāršākās shēmas.....	37
Ekvivalentu pārveidojumu metode .....	37
Ķēdes ar induktīviem un kapacitīviem elementiem.....	39
Trīsstūra vai zvaigznes slēguma pārveidošana .....	40
Līdzstrāvas ķēdes ar vairākiem avotiem: aprēķina metodes .....	42
Kirhofa vienādojumu metode .....	43
Mezglu sprieguma metode.....	44
Jaudu bilances sastādīšana.....	46
Ekvivalentā generatora metode.....	47
Līdzstrāvas ķēžu un režīmu piemēri .....	49
Sprieguma dalītājs.....	49
Līdzstrāvas tilta shēma .....	50
Aktīva divpola darba režīmi .....	50
Pašpārbaudes uzdevums.....	54
3. NODAĻA. Maiņstrāvas ķēdes .....	55
Pamatjēdzieni un pieņemtie apzīmējumi .....	56
Sinusoidālas funkcijas fāzes .....	56
Periods, frekvence, leņķiskā frekvence.....	57
Divi svarīgākie lielumi – fāžu nobīde un efektīvā vērtība .....	57
Fāžu nobīde .....	57
Sinusoidāla sprieguma (strāvas, EDS) efektīvā vērtība .....	58
Darbības ar sinusoidām maiņstrāvas ķēžu vienādojumos .....	59
Kāpēc rodas fāžu nobīdes.....	59
Sinusoīdu saskaitīšana: jēdziens par vektoru diagrammām .....	60
Sinusoīdu reizinājuma vidējā vērtība.....	62
Elementu vienādojumi .....	62
Elementa $E$ vienādojums.....	62
Rezistīva elementa $R$ vienādojums .....	62
Induktīva elementa $L$ vienādojums.....	63
Kapacitīva elementa $C$ vienādojums.....	63
Spriegumu un strāvu vienādojumi .....	64
Divpola aktīvā jauda .....	64
Formulu tabulas fragments .....	66
Vektoru diagrammas un pretestību trīsstūri .....	66
Trīs elementu vektoru diagrammas.....	67
Virknes slēguma pretestību trīsstūris .....	68
Vektoru diagrammu zīmēšana shēmai ar paralēliem zariem.....	70
Strāvas aktīvā un reaktīvā komponente.....	72
Jaudas maiņstrāvas ķēdē.....	73

Aktīvā, reaktīvā un šķietamā jauda .....	73
Jaudu trīsstūris un citas jaudu formulas .....	74
Vektoru diagrammu metodes izmantošanas robežas .....	75
Topogrāfiskās diagrammas .....	75
Kas ir topogrāfiskās diagrammas .....	76
Kā uzzīmēt topogrāfisko diagrammu .....	76
Aprēķini ar vektoru diagrammu metodi (piemēri .....	77
Maņstrāvas ķēžu piemēri .....	82
Aktīvās jaudas mērīšana .....	82
Induktivitātes spoles parametru noteikšana .....	83
Spriegumu rezonanse .....	84
Jaudas koeficienta uzlabošana .....	86
Pašpārbaudes uzdevums .....	90
4. NODAĻA. Simboliskā metode .....	91
Komplekso skaitļu plakne un darbības ar kompleksajiem skaitļiem .....	91
Sinusoidāla sprieguma (strāvas, EDS) attēlošana kompleksajā plaknē .....	93
Elementu virknes slēguma kompleksā pretestība .....	94
Aizvietošanas shēmu vienādojumi kompleksā formā .....	95
Elementu vienādojumi .....	95
Spriegumu un strāvu vienādojumi .....	96
Divpola kompleksā jauda .....	97
Ekvivalento pārveidojumu formulas .....	97
Simboliskās metodes lietošanas piemēri .....	98
Pašpārbaudes uzdevums .....	106
5. NODAĻA. Trīsfāžu maņstrāvas ķēdes .....	107
Trīsfāžu sistēmas aizvietošanas shēmas elementi .....	108
Trīsfāžu ģenerators shēma un spriegumi .....	108
Trīsfāžu ģenerators topogrāfiskā diagramma .....	108
Pārvades līnija .....	109
Trīsfāžu patērētājs .....	110
Trīsfāžu patērētāja vektoru diagramma un analīze .....	111
Vektoru diagrammas zīmēšanas plāns – pats svarīgākais .....	111
Trīsfāžu patērētāja topogrāfiskā diagramma un fāžu spriegumi .....	112
Trīsfāžu patērētājs zvaigznes slēgumā .....	113
Zvaigznes slēgums ar neitrālvadu .....	114
Zvaigznes slēgums bez neitrālvada .....	115
Avārijas režīmi trīs vadu sistēmā .....	116
Trīsfāžu patērētājs trīsstūra slēgumā .....	117
Nesimetrisks patērētājs .....	118
Simetrisks patērētājs .....	118

Simetriska trīsfāžu patērētāja aktīvā jauda .....	119
Trīsfāžu patērētāja aktīvās jaudas mērīšana .....	120
Trīsfāžu patērētāja aprēķina piemēri. ....	121
Simetriska trīsfāžu patērētāja aprēķina piemēri .....	121
Zvaigznē slēgta nesimetriska patērētāja aprēķina piemēri .....	123
Trīsstūrī slēgta nesimetriska patērētāja aprēķina piemēri .....	131
Pašpārbaudes uzdevums. ....	136
<b>6. NODAĻA. Pārejas procesi līdzstrāvas ķēdēs .....</b>	<b>137</b>
Pamatjēdzieni un pieņemtie apzīmējumi .....	138
Pārejas procesi <i>RL</i> un <i>RC</i> ķēdēs. ....	139
Pirmās kārtas diferenciālvienādojums un tā atrisinājums. ....	139
Komutācijas likumi – pats svarīgākais pārejas procesos. ....	143
Pārejas procesa aprēķina plāns .....	143
Laika konstantes noteikšana. ....	144
Pārejas procesu aprēķina piemēri. ....	144
Pārejas procesu piemēri <i>RL</i> un <i>RC</i> ķēdēs. ....	150
Induktivitātes spoles pieslēgšana līdzsprieguma avotam. ....	150
Kondensatora uzlāde <i>RC</i> ķēdē. ....	151
Kondensatora izlāde <i>RC</i> ķēdē .....	153
Līdzstrāvas ķēdes ar induktivitātes spoli pārtraukšana .....	154
Pārejas procesi <i>RLC</i> ķēdēs. ....	156
Otrās kārtas diferenciālvienādojums un tā saknes .....	157
Aperiodisks režīms .....	158
Svārstību režīma pamatjēdzieni .....	158
Svārstību režīma diferenciālvienādojuma atrisinājums .....	159
Svārstību režīma piemērs un laika diagramma .....	160
Pašpārbaudes uzdevums. ....	162
<b>1. pielikums. Formulu tabula ar komentāriem .....</b>	<b>163</b>
<b>2. pielikums. Uzdevumi ar atrisinājumiem .....</b>	<b>165</b>
<b>3. pielikums. Metodes un algoritmi. ....</b>	<b>166</b>
<b>4. pielikums. Vingrinājumi un piemēri. ....</b>	<b>167</b>
Pēcvārda vietā .....	168
Priekšmetu rādītājs. ....	174

## Priekšvārds

Šī grāmata adresēta galvenokārt Rīgas Tehniskās universitātes studentiem, kuri apgūst kursu "Elektrotehnika un elektronika", lai sniegtu priekšstatu un attīstītu izpratni par elektrisko ķēžu teorijas pamatiem, un piedāvātu laboratorijas darbu veikšanai nepieciešamo informāciju. Materiāla izklāsta līmenis izvēlēts, ievērojot, ka students ir apguvis matemātikas kursa pamatus. Citas priekšzināšanas vēlamas, bet nav nepieciešamas: iepazīšanās ar elektrotehnikas jautājumiem sākas gandrīz "no nulles".

Elektrisko ķēžu – dažādu elementu savienojumu, kas pieslēgti dažāda rakstura (līdzstrāvas, maiņstrāvas, trīsfāžu maiņstrāvas) avotiem – **aizvietošanas shēmu** matemātiski pareizai aprakstīšanai elektrotehnikai ir savs no fizikas atšķirīgs jēdzienu loks. Ievērojama daļa šo jēdzienu saistīta ar elektrisko ķēžu vienādojumiem – no tā arī šīs grāmatas nosaukums. Grāmatā praktiski nav aprakstoša materiāla – to vairāk kā pietiekamā daudzumā var atrast internetā un tehniskajā literatūrā. Priekšroka dota mazāk pieejamiem elektrisko shēmu analīzes galveno ideju skaidrojumiem (internetā tos meklēt ir veltīgi), uzdevumu risināšanas plāniem, algoritmiem un metodēm.

Grāmata var būt arī palīgs pastāvīgām studijām, it sevišķi apstākļos, kad dažās tehnisko specialitāšu studiju programmās (vairāk vai mazāk tālredzīgi) samazina elektrotehnikai un elektronikai atvēlēto stundu skaitu. Lai gan to neparedzot, grāmatas pirmo prototipu "Elektrotehnikas uzdevumu risināšanas metodika" (1982. g.) iecerēju tā, lai arī neklātienē studējošie varētu ar grāmatu strādāt patstāvīgi, bez biežām pasniedzēja konsultācijām.

Tāpat kā citās tehniskās disciplīnās (teorētiskajā mehānikā, materiālu pretestībā u. c.) arī elektrotehnikā aprēķinos lietojamās formulas eksistē tikai kopā ar procesam atbilstošu konfigurāciju vai shēmu. Ir situācijas (laboratorijas darba rezultātu apstrāde), kad zināmas shēmas aprēķinu var veikt, ievietojot dotās formulās skaitliskās vērtības. Biežāk, risinot uzdevumus, jāsastopas ar visdažādākajām shēmām un šī metode neder: formulas ir atkarīgas no konkrētās shēmas. Tas nozīmē, ka kursa minimālais uzdevums (līdzīgi pianista iemaņai spēlēt "no lapas") ir iemācīties **sastādīt vienādojumus nepazīstamai shēmai**.

Šī uzdevuma neierastākā daļa ir shēmas sagatavošana aprēķinam: strāvu un spriegumu skaita noteikšana, lai tiem izvēlētos individuālus apzīmējumus un pieņemtu pozitīvos virzienus. Tikai pēc tam iespējams sastādīt vienādojumus. Lai palīdzētu vērtēt uzrakstīto formulu pareizību, grāmatā piedāvāta **formulu tabula** ar septiņiem pamatvienādojumiem un to modifikācijām.



Tabulas kolonna “Momentānajām vērtībām” satur septiņas formulas, kas ir spēkā jebkurai līdzstrāvas vai maiņstrāvas ķēdei. Pirmajās četrās rindās ir četru **elementu** ( $e, R, L, C$ ) vienādojumi. Tad ir divi shēmas **struktūras** vienādojumi. Septītajā rindā – **jaudas** formulas. Formulu “**lietošanas noteikumi**” paskaidroti grāmatas pirmajā nodaļā un īsumā apkopoti pielikumā. Nākamajās nodaļās parādīts, kā septiņas formulas pārveidotas, lai izvairītos no diferenciālvienādojumiem, aprēķinot **līdzstrāvas** ķēdes, maiņstrāvas ķēdes, izmantojot **vektoru diagrammu** metodi, un arī maiņstrāvas ķēdes, izmantojot **simbolisko** metodi. Ievērojiet, ka pārējās tabulas kolonnās atvasinājumu nav.

Turklāt gandrīz viss pustūkstotis formulu šajā grāmatā “izgatavots”, izmantojot formulu tabulu. Pirmais solis, lai apgūtu vienādojumu sastādīšanu konkrētai shēmai, varētu būt šāds: izvēlēties piemēru kādā no nodaļām (varbūt izņemot piekto), pārbaudīt strāvu un spriegumu skaitu shēmā un to apzīmējumus, atrast shēmai uzrakstīto vienādojumu paraugus formulu tabulā un novērtēt vienādojumu atbilstību lietošanas noteikumiem.

Grāmatas struktūru lielā mērā nosaka formulu tabula.

	Momentānajām vērtībām	Līdzstrāvai	Vektoru diagrammu metode	Simboliskā metode
Elementu vienādojumi	$u = -e$	$U = -E$	$\bar{U} = -\bar{E}$	$\underline{U} = -\underline{E}$
	$u = Ri$	$U = RI$	$U = RI, \varphi = 0^\circ$	$\underline{U} = \underline{Z}I$
	$u = L \frac{di}{dt}$	$U = 0$	$U = X_L I, \varphi = 90^\circ$	
	$i = C \frac{du}{dt}$	$I = 0$	$U = X_C I, \varphi = -90^\circ$	
Spriegumu un strāvu vienādojumi	$u_{13} = u_{12} + u_{23}$	$U_{13} = U_{12} + U_{23}$	$\bar{U}_{13} = \bar{U}_{12} + \bar{U}_{23}$	$\underline{U}_{13} = \underline{U}_{12} + \underline{U}_{23}$
	$\sum \pm i = 0$	$\sum \pm I = 0$	$\sum \pm \bar{I} = 0$	$\sum \pm \underline{I} = 0$
Divpola jauda	$p = ui$	$P = UI$	$P = UI \cos \varphi$	$\underline{S} = \underline{U}I^* = P \pm jQ$
			$Q = UI \sin \varphi$	
			$S = UI$	

Pirmā nodaļa iepazīstina lasītāju ar elektriskajiem lielumiem, elektrisko ķēžu aizvietošanas shēmu elementiem un septiņiem “tabulas vienādojumiem”, kas saista šo lielumu momentānās vērtības un ir spēkā jebkurai lineārajai ķēdei. Aplūkota strāvu un spriegumu apzīmēšana shēmās – tas palīdzēs pareizi uzrakstīt četru elementu vienādojumus un jaudas formulas konkrētai shēmai. Aplūkoti arī ķēžu topoloģijas jēdzieni – tie nepieciešami strāvu un spriegumu vienādojumu pareizai lietošanai. Formulu “lietošanas noteikumu” apgūšanai patērētais darbs atmaksāsies, jo tos pārmanto pārējās tabulas kolonnas vai grāmatas nākamās nodaļas. Rupju kļūdu profilaksei nodaļas sākumā pievērsta uzmanība jautājumiem, par kuriem “parasti nerunā”.

Otrā nodaļa veltīta līdzstrāvas ķēdēm. Vienādojumi un to lietošanas noteikumi ir līdzīgi pirmajā nodaļā aplūkotojiem. Nodaļa iepazīstina ar shēmas fragmentu ekvivalentu pārveidošanu, ko izmanto, aprēķinot līdzstrāvas ķēdes ar vienu avotu. Seko ķēžu ar vairākiem avotiem aprēķina metodes un līdzstrāvas ķēžu praktiski piemēri. Viens no tiem attiecas uz laboratorijas darba tematiku.

Trešajā nodaļā aplūkota vektoru diagrammu metode sinusoidālām maiņstrāvas ķēdēm. Sākumā iepazīsimies ar diviem tabulā lietotiem lielumiem: efektīvo vērtību un fāžu nobīdi. Parādīts, kā no formulu tabulas loģiski izriet vektoru diagrammu metodes jēdzienu (fāžu nobīde, jaudas koeficients, elementa vektoru diagramma) nepieciešamība. Izklāstīta vektoru diagrammu metode un tās lietojumi – divu maiņstrāvas ķēžu tipu aprēķins ar šo metodi. Nodaļas beigās – maiņstrāvas ķēžu piemēri un divu laboratorijas darbu tematika.

Ceturtnā nodaļa veltīta maiņstrāvas ķēžu aprēķinam, izmantojot simbolisko metodi. Parādīts, kā maiņstrāvas ķēdes aprēķināt ar līdzstrāvas ķēžu aprēķina metodēm, ievērojot formulu līdzību tabulas kolonnās.

Līdz ar to formulu tabula pabeigta, un piektā nodaļa pievēršas trīsfāžu maiņstrāvas ķēdēm. Atšķirībā no iepriekš aplūkotā te ir sarežģītāka shēmu struktūra. Nodaļa iepazīstina ar topogrāfiskajām diagrammām – to lietošana daudzos gadījumos ļauj izmantot trešajā nodaļā lietotās metodes. Aplūkotās shēmas ar simetrisku un nesimetrisku patērētāju trīsvadu un četrvadu sistēmās, kā arī laboratorijas darbos pētīti avārijas režīmi.

Sestā nodaļa veltīta pārejas procesiem  $RL$  un  $RC$  ķēdēs ar līdzsprieguma avotu. Tā iepazīstina ar tipisku pārejas procesa laika diagrammu, pamatjēdzieniem, komutācijas likumiem un pārejas procesa diferenciālvienādojuma atrisinājumu. Tas ļauj jau nodaļas sākumā dot algoritmu pārejas procesa aprēķinam bez diferenciālvienādojuma risināšanas. Algoritmu ilustrē divi aprēķina piemēri un dažu klasisku pārejas procesu apskats, kā arī teorija laboratorijas darbam. Nodaļas beigās aplūkotās pārejas procesu īpatnības  $RLC$  ķēdēs.

Autors pateicas asoc. profesoram Andrejam Podgornovam par atbalstu grāmatas tapšanā.

# Grāmatā lietotie apzīmējumi

Apzīmējamie lielumi tekstā un formulās	Apzīmējumi
Strāvas, sprieguma, EDS un jaudas momentānā vērtība	$i, u, e, p$
Strāvas, sprieguma un EDS maksimālā (amplitūdas) vērtība	$I_m, U_m, E_m$
Strāvas, sprieguma un EDS efektīvā vērtība	$I, U, E$
Strāvas un sprieguma attēlojošais vektors	$\vec{I}, \vec{U}$
Strāvas, sprieguma, EDS, pretestības un jaudas kompleksā vērtība	$\underline{I}, \underline{U}, \underline{E}, \underline{Z}, \underline{S}$
Strāvas, sprieguma, EDS, pretestības un jaudas kompleksās vērtības modulis	$I, U, E, Z, S$
Pretestība, induktivitāte un kapacitāte	$R, L, C$
Aktīvā, induktīvā, kapacitīvā, reaktīvā un pilnā pretestība	$R, X_L, X_C, X, Z$
Aktīvā, reaktīvā un pilnā (šķietamā) jauda	$P, Q, S$
Sākuma fāze, fāžu nobīde	$\alpha, \varphi$
Laiks, laika konstante	$t, \tau$

## 1. NODAĻA

# Aizvietošanas shēmu vienādojumi

Šajā nodaļā jūs iepazīsities ar

- elektrisko ķēžu un tajās notiekošo procesu klasifikāciju,
- četriem elektriskajiem lielumiem un to apzīmēšanu aizvietošanas shēmās,
- četriem aizvietošanas shēmu elementiem un to vienādojumiem,
- aizvietošanas shēmu topoloģijas pamatjēdzieniem,
- diviem aizvietošanas shēmu struktūras vienādojumiem,
- elektriskās enerģijas pārveidojumu jaudu.

### Elektrisko ķēžu klasifikācija

Reālās elektriskās sistēmās sastopami visdažādākie enerģijas **avoti** un **patērētāji**, enerģijas un informācijas pārveidotāji, mērīšanas un cita veida aparatūra. Lai elektrisko enerģiju no avota piegādātu un sadalītu patērētājiem, ar **savienojošo vadu** palīdzību izveido elektriskās ķēdes. Atkarībā no avota sprieguma veida izšķir **līdzstrāvas**, **maiņstrāvas** un **trīsfāžu maiņstrāvas** ķēdes.

Elektrostacijās enerģiju ražo **trīsfāžu maiņstrāvas** generatori. Trīsfāžu elektro-pārvades līnijas, kurās spriegumu paaugstina vai vairākkārt pazemina, izmantojot trīsfāžu transformatorus, enerģiju trīsfāžu maiņsprieguma formā nogādā līdz patērētājiem un arī dzīvojamajām ēkām. Tur to sadala grupās un atsevišķiem dzīvokļiem parasti piegādā **vienfāzes maiņspriegumu**. Līdzspriegumu iegūst ne tikai ar līdzstrāvas ģeneratoriem, bet, galvenokārt, pārveidojot vienfāzes vai trīsfāžu maiņspriegumu, izmantojot pusvadītājiem tālrunu taisngriešanai. **Līdzsprieguma avoti** nepieciešami elektronisko shēmu barošanai, īpašiem tehnoloģiskajiem procesiem un visur, kur plašās robežās jāregulē elektrodzinēju rotācijas ātrums. Nelielas jaudas ķēžu barošanai lieto elektroķīmiskus līdzstrāvas avotus, piemēram, akumulatoru baterijas.

Elektriskās ķēdes iedala **lineārās** un **nelineārās**. Lineārā ķēdē visu elementu parametriem ir nemainīgas skaitliskās vērtības. Ķēde ir nelineāra, ja tajā ir vismaz viens nelineārs elements – tāds, kura parametrs ir atkarīgs no tam pieliktā sprieguma vai caurplūstošās strāvas. Jāpiezīmē, ka nelineāras ir visas elektronikā lietotajās ķēdes.

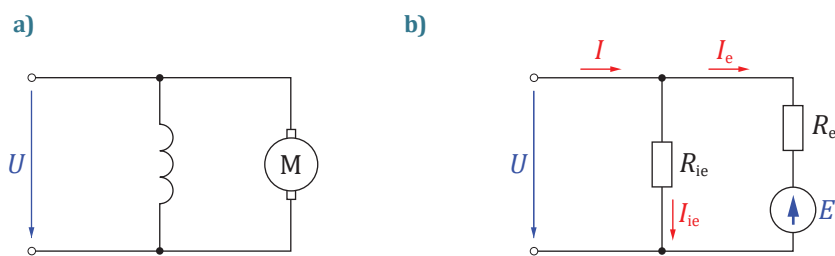
Elektriskajās ķēdēs notiek ne vien stabili **stacionāri režīmi**, bet arī **pārejas procesi**. Tie novērojami īslaicīgi – piemēram, pieslēdzot vai atslēdzot avotu vai atsevišķus ķēdes elementus.

## Elektrisko ķēžu aizvietošanas shēmas

Elektriskā shēma ir elektriskās ķēdes grafisks attēlojums, kurā reālie ķēdes elementi aizstāti ar pieņemtiem tipveida apzīmējumiem. Atkarībā no uzdevuma izvēlas piemērota tipa shēmu. Struktūrshēmas lieto, lai attēlotu funkcionālās saites starp sarežģītas ķēdes blokiem. Montāžas shēmas ir elektroiekārtu daļu rasējumi vai skices, kas parāda to izvietojumumu un savienojumus, lai sekmētu iekārtas montāžas procesu. Principskāmas parāda visus ķēdes elementus un to savienojumus, taču lielas elementu dažādības dēļ tās nav piemērotas aprēķiniem.

Elektrisko ķēžu analīzei un aprēķiniem lieto aizvietošanas shēmas. To priekšrocība ir neliels idealizētu elementu tipu skaits.

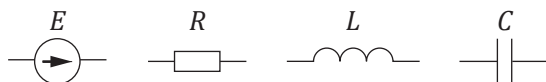
1.1. attēls ilustrē principskāmas un aizvietošanas shēmas atšķirības. 1.1.a attēlā parādīta līdzstrāvas dzinēja enkura (M) ķēde, kam paralēli pievienota ierosmes ķēde – statora tinums magnētiskā lauka radīšanai. Aizvietošanas shēma paredzēta dzinēja stacionāra režīma aprēķinam. Tajā bez avota  $U$  ir tikai divi elementu tipi –  $E$  un  $R$ .



1.1. att. Līdzstrāvas dzinēja principskāma (a) un aizvietošanas shēma (b).

## Aizvietošanas shēmu elementi

Šajā grāmatā lietotas lineāru ķēžu aizvietošanas shēmas ar četriem **idealizētu elementu** tipiem: elektrodzinējspēku  $E$ , rezistīvu elementu  $R$ , induktīvu elementu  $L$  un kapacitīvu elementu  $C$ . Izvēlētais elementu skaits ir pietiekams, lai analizētu un aprēķinātu stacionāros režīmus un pārejas procesus lineārās līdzstrāvas, vienfāzes maiņstrāvas un trīsfāžu maiņstrāvas ķēdēs.



1.2. att. Četru elementu tipu apzīmējumi shēmās.

Četriem enerģijas pārveidojumu veidiem elektriskajās ķēdēs atbilst četri aizvietošanas shēmu elementu tipi:

- **rezistīvs elements**  $R$  (parametrs: pretestība  $R$ , tās mērvienība – oms,  $\Omega$ ) modelē elektriskās enerģijas **neatgriezenisku** pārveidošanu citā enerģijas veidā proporcionāli strāvas kvadrātam ( $i^2$ );
- **induktīvs elements**  $L$  [parametrs: induktivitāte  $L$ , tās mērvienība – henrijs, H (tā dimensija  $\Omega \cdot s$ )] modelē procesus induktivitātes spolē: tajā ir **magnētiskais lauks**, kurā **uzkrātā** enerģija ir proporcionāla strāvas kvadrātam ( $i^2$ );
- **kapacitīvs elements**  $C$  [parametrs: kapacitāte  $C$ , tās mērvienība – farads, F (tā dimensija  $\Omega^{-1}s$ )] modelē procesus kondensatorā: tajā ir **elektriskais lauks**, kurā **uzkrātā** enerģija ir proporcionāla sprieguma kvadrātam ( $u^2$ );
- **elektrodzinējspēks**<sup>1</sup> jeb **EDS** (parametrs:  $E$ , tā mērvienība – volts, V) raksturo ne tikai enerģijas avotu, bet arī pretēja virziena **enerģijas pārveidojumu**. Piemēram, līdzstrāvas elektrodzinēja aizvietošanas shēmā (1.1.b att.) EDS norāda uz elektriskās enerģijas pārveidošanu mehāniskajā enerģijā.

Grāmatā sastapsim arī parastākus rezistīva, induktīva un kapacitīva elementa nosaukumus no elektrisko ķēžu terminoloģijas: rezistors, ideālā spole un kondensators.

## Elektriskie lielumi

Elektriskās enerģijas avots pārveido elektriskajā enerģijā kādu citu enerģijas (ķīmiskās, mehāniskās u. c.) veidu. Avota poli (izvadi, pieslēgspaiļes) iegūst atšķirīgas elektriskā potenciāla vērtības. Ja avotam pievienoti patērētāji, izveidojot noslēgtu ķēdi, tajā notiek elektrisko lādiņu kustība, kas nodrošina elektriskās enerģijas plūsmu no avota līdz patērētājiem. Elektrotehnikā enerģijas plūsmu raksturo ar t. s. elektriskajiem lielumiem. Tie ir spriegums, strāva un jauda.

Ķēdes punkta potenciālam ir nozīme tikai salīdzinājumā ar cita punkta potenciālu, tāpēc priekšroku dod potenciālu starpībai jeb **spriegumam**  $u$ . Avota spriegumam ir īpašs nosaukums – elektrodzinējspēks (EDS)  $e$ . Spriegumu un EDS mēri voltos (V).

**Jauda**  $p$  raksturo enerģētiskos procesus ķēdē. Jaudas momentānā vērtība ir elektriskās enerģijas plūsmas intensitāte ( $p = dw/dt$ ). Jaudas mērvienība ir vats (W). Strāva raksturo ar enerģijas plūsmu saistīto elektrisko lādiņu kustību. **Strāvas**  $i$  momentānā vērtība raksturo lādiņu kustības intensitāti ( $i = dq/dt$ ). Strāvas mērvienība ir ampērs (A). Līdzstrāvas ķēdē spriegumu vai strāvu raksturo tikai vērtība un polaritāte. Maiņstrāvas ķēdēs jāreķinās ar lielāku skaitu raksturojošo lielumu. Tādi ir: frekvence, periods, sākumfāze, momentvērtība, vidējā vērtība, efektīvā vērtība u. c.

Mērot strāvu vai spriegumu līdzstrāvas ķēdē, parasti nosaka lieluma absolūto vērtību, bet maiņstrāvas ķēdē – vidējo kvadrātisko jeb efektīvo vērtību. Mērot jaudu maiņstrāvas ķēdē, nosaka aktīvo jaudu – momentānās jaudas vidējo vērtību  $P$ . Sprieguma, strāvas un jaudas mēraparāti ir voltmētrs, ampērmētrs un vatmētrs.

<sup>1</sup> Nosaukums saglabājies no 19. gadsimta sākuma.

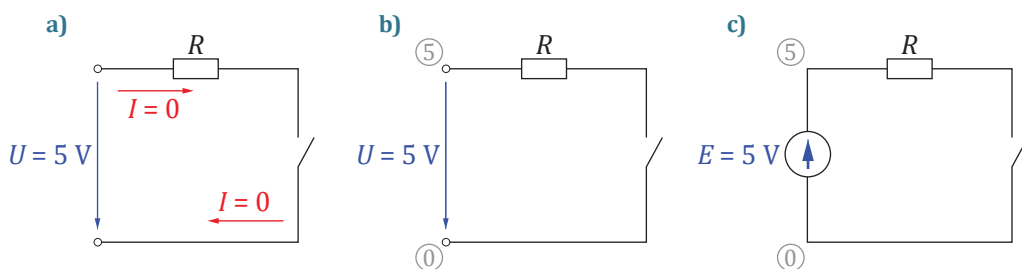
Aizvietošanas shēma ir reālas elektriskās ķēdes matemātiskais modelis, kas ir piemērots elektrisko ķēžu analīzei un aprēķiniem. Elektrisko ķēdi apraksta, izmantojot **elektriskos lielumus** (spriegumu  $u$ , strāvu  $i$  un jaudu  $p$ ), aizvietošanas shēmas parametrus (pretestību  $R$ , induktivitāti  $L$  un kapacitāti  $C$ ) un septiņus aizvietošanas shēmu vienādojumus. Aizvietošanas shēmās fizikālos procesus – enerģiju ( $W$ ) un lādiņu plūsmu ( $Q$ ) – neaplūkosim. Potenciāla  $\varphi$  jēdziens dažreiz būs vajadzīgs metodisku apsvērumu dēļ.

Katrs no elektriskajiem lielumiem ( $u, i, p$ ) ir skalārs lielums, tā **skaitliskā vērtība** var būt pozitīva vai negatīva. Tādēļ shēmā parāda sprieguma  $u$  vai strāvas  $i$  **pieņemto virzienu** (saka arī “pieņemto pozitīvo virzienu”). Negatīva sprieguma vai strāvas vērtība nozīmē, ka attiecīgā lieluma **faktiskais virziens** ir pretējs pieņemtajam. Jaudas  $p$  virzienu shēmā neparāda. Ja sprieguma un strāvas pieņemtie virzieni sakrīt (vai nesakrīt), tas nozīmē, ka posms nosacīti ir patērētājs (vai avots).

Elektriskie lielumi vispār ir laikā mainīgi. Ar mazajiem burtiem  $u, i, p$  apzīmē šo lielumu **momentānās vērtības**. Ar lielajiem burtiem  $U, I, P$  – laikā nemainīgus elektriskos lielumus **līdzstrāvas ķēdēs** vai arī elektrisko lielumu vidējās, **vidējās kvadrātiskās** vai amplitūdas vērtības maiņstrāvas ķēdēs.

### Pirms oficiālās daļas...

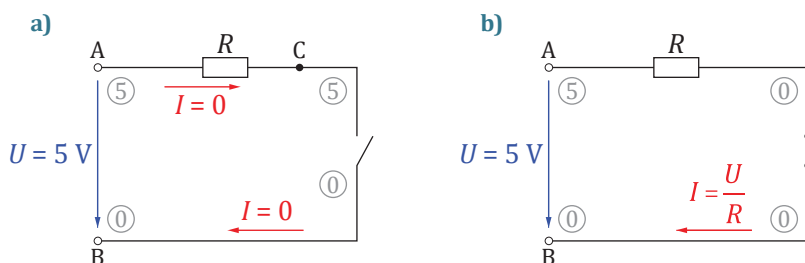
...iepazīstināšu lasītāju ar dažām aizvietošanas shēmu “aksiomām” – šķietami tik pašsaprotamiem principiem, ka grāmatās par tiem pat nerunā. Risinot uzdevumus, tos sastapsiet uz katra soļa, tāpēc to nezināšana vienmēr noved pie visai negaidītiem (sliktākajā nozīmē) rezultātiem. Četru principu ilustrēšanai izvēlēta visvienkāršākā shēma (1.3.a att.). Tiesa, shēma nav nemaz tik vienkārša – tajā ir četri dažādi elementi: līdzsprieguma avots, kura spriegums ir 5 V, patērētājs  $R$ , atslēgts slēdzis un trīs savienotājpvadi.



**1.3. att.** Shēma ar pārtraukumu (a), avota potenciāli (b), tā pati shēma ar avota EDS (c).

1. Shēmas (1.3.a att.) labajā pusē ir pārtraukums – slēdzis ir atslēgts. Skaidrs, ka strāva caur pārtraukumu nav iespējama ( $I = 0$ ). Mazāk acīmredzams, ka nekas neplūst arī **uz ķēdes pārtraukumu un no tā**. Cik tālu uz abām pusēm no pārtraukuma nav strāvas? Atbilde: līdz tuvākajiem sazarojuma punktiem. Šajā shēmā sazarojumu nav, tādēļ te strāvas nav vispār.

2. a) shēmas kreisajā pusē šķietami arī ir pārtraukums. Tā nav! Tas ir ķēdes vienīgā avota apzīmējums, proti, shēmas kreisajā pusē parāda sprieguma bultiņu starp avota poliēm. Līdzās bultiņai ir sprieguma apzīmējums un arī tā vērtība ( $U = 5\text{ V}$ );
- b) spriegumu atšķirībā no strāvas mērī starp diviem elektriskās ķēdes vai aizvietošanas shēmas punktiem. Spriegums ir divu punktu **potenciālu starpība**. Potenciāla skaitliskajai vērtībai ir jēga tikai salīdzinājumā ar citu punktu potenciāliem, tāpēc viena punkta potenciālu pieņem brīvi. **Potenciāls samazinās sprieguma  $U$  bultiņas virzienā** par  $U$  voltiem. Piemēram, pieņemot, ka 1.3.b attēla shēmā avota apakšējā pola potenciāla vērtība ir  $0\text{ V}$ , avota augšējā pola potenciāla vērtība būs  $5\text{ V}$ ;
- c) avotu shēmā var attēlot arī ar tā EDS (1.3.c att.). Šo paņēmieni gan lieto tikai vairāku avotu shēmās. Sprieguma un EDS bultiņu virzieni ir savstarpēji pretēji, jo **EDS  $E$  paaugstina** potenciālu bultiņas virzienā par  $E$  voltiem.
3. Reālās ķēdēs vadu pretestība ir atkarīga no to materiāla, šķēsgriezuma laukuma un garuma. **Aizvietošanas shēmās** elementus savienojšie vadi ir bez pretestības, to garumam un citiem parametriem nav nozīmes: **uz jebkura vada** visā tā garumā ir **viens un tas pats potenciāls**. Piemēram, 1.3.a attēla shēmā (tā atkārtota 1.4.a att.) nulles potenciāls ir no avota apakšējā pola B līdz slēdzim. Ja slēdzi noslēgtu (1.4.b att.), nulles potenciāls sasniegtu rezistora  $R$  izvadu.



1.4. att. Potenciāli shēmā ar pārtraukumu (a); kas izmainās, ja slēdzis ir noslēgts (b)?

4. No skolas laikiem pazīstama 1.4.b attēla shēma. Strāvu  $I$  tajā nosaka Oma likums:  $U = RI$ . Ja shēma ir kaut nedaudz sarežģītāka (piemēram, 1.4.a att.), šī formula jālieto uzmanīgi: lielumi Oma likuma izteiksmē attiecas tikai uz rezistoru  $R$ . Aprēķinot strāvu  $I$ , formulā jālieto **spriegums starp rezistora izvadiem** (nevis kāds cits spriegums). Piemēram, 1.4.a attēla shēmā ar Oma likuma izteiksmi var uzzināt tikai to, ka spriegums starp rezistora  $R$  izvadiem (A un C)  $U_{AC} = 0\text{ V}$ , jo ķēdē strāvas nav ( $I = 0\text{ A}$ ). Kāds tad būs potenciāls punktā C? Pareizi, tāds pats kā punktā A ( $5\text{ V}$ ), ievērojot tikko aprēķināto vērtību  $U_{AC} = 0\text{ V}$ . Vai pamanījāt arī, ka shēmā ar pārtraukumu (1.4.a att.) spriegums starp slēdža poliēm ir  $5\text{ V}$ ?



Tādas, lūk, aksiomas. Ceru, ka to izpētīšana jums noderēs. Citādi elektriskās shēmas jau no paša sākuma var izrādīties nesaprotamākas nekā vajadzētu.

## Par septiņiem aizvietošanas shēmu vienādojumiem

Mācību grāmatās ir simtiem elektrotehnikas formulu. Tas arī saprotams, ievērojot elektrisko ķēžu un procesu dažādo raksturu (līdzstrāvas ķēdes, maiņstrāvas ķēdes, trīsfāžu maiņstrāvas ķēdes, stacionāri režīmi un pārejas procesi) un konfigurāciju (dažādu elementu skaitu un to savienojumu veidu). Taču gandrīz visas formulas, kas attiecas uz lineārām ķēdēm ar četriem elementu tipiem ( $E$ ,  $R$ ,  $L$  un  $C$ ), izriet **no septiņiem aizvietošanas shēmu vienādojumiem**. Šajā nodaļā aplūkosim šos pamatvienādojumus, katru kopā ar lietošanas pamācību – ne mazāk svarīgu kā pats vienādojums.

Katrs no četriem **elementu vienādojumiem** – atbilstoši četriem elementu tipiem:  $E$ ,  $R$ ,  $L$  un  $C$  – ir sakarība starp attiecīgā elementa spriegumu un strāvu (vai vienā gadījumā – EDS).

Lietojot divus **struktūras vienādojumus**, jāpazīst shēmas uzbūve jeb topoloģija. Piemēram, elementa vienādojumā ir **viena** elementa divi dažādi lielumi ( $u$  un  $i$  vai  $u$  un  $e$ ), savukārt **spriegumu vienādojumā** ir tikai spriegumi uz **vairākiem** shēmas posmiem, bet **strāvu vienādojumā** – tikai strāvas **vairākos** shēmas zaros.

**Jaudas vienādojums** domāts enerģētisko procesu aprēķināšanai. Iekārtas jaudu dažādās tehnikas nozarēs raksturo divu lielumu reizinājums: mehānikā tie ir spēks un ātrums, hidraulikā – spiediens un ražība utt. Elektrotehnikā šie lielumi ir spriegums un strāva. Vienādojums apraksta ķēdes daļas ģenerēto vai patērēto momentāno jaudu.

## Strāvu un spriegumu apzīmēšana shēmā

Katram **formulā** lietotam spriegumam vai strāvai jābūt atrodamam **shēmā**.

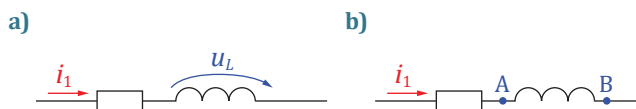
Pirmkārt, katram spriegumam un strāvai izvēlas **individuālu apzīmējumu**, un parāda to shēmā. Tas atļauj apzīmēto lielumu lietot formulās vai tekstā.

Otrkārt, katram spriegumam un strāvai shēmā jāparāda **pieņemtais virziens**. Maiņstrāvas ķēdē **faktiskais virziens** mainās 100 reizes sekundē, arī līdzstrāvas ķēdē to bieži vien uzzina tikai aprēķina rezultātā. Aprēķinā iegūta pozitīva vērtība nozīmē, ka lieluma faktiskais virziens (dotajā momentā) sakrīt ar pieņemto virzienu, negatīva vērtība nozīmē, ka tas ir pretējs pieņemtajam.

### Strāvas apzīmēšana

Strāvu shēmā apzīmē **ar strāvas bultiņu**. Līdzās bultiņai pievieno strāvas pieņemto apzīmējumu. Momentāno vērtību (pārejas procesā) apzīmēšanai lieto mazos burtus (piemēram,  $i$ ,  $i_1$ ,  $i_l$ ), bet konstantu vai vidējo vērtību apzīmēšanai (stacionārā režīmā) – lielos burtus (piemēram,  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_l$ ).

Starp citu, strāva “pieder” shēmai, nevis atsevišķam elementam. Piemēram, 1.5. attēla shēmās ir virknē slēgti elementi, caur kuriem plūst viena un tā pati strāva  $i_1$ . Bultiņu zīmē līdzās jebkuram virknes slēguma vadam.



1.5. att. Strāvas un sprieguma apzīmēšana ar strāvas un sprieguma bultiņām (a), tā paša sprieguma  $u_L$  cits apzīmējums – ar diviem indeksiem –  $u_{AB}$  (b).

### Sprieguma apzīmēšana

Tā kā spriegums ir divu shēmas punktu potenciālu starpība, tad, apzīmējot to: 1) shēmā jānorāda abi punkti, 2) jānorāda arī sprieguma pieņemtais virziens. To var izdarīt divējādi:

- **ar sprieguma bultiņu shēmā**, līdzās pierakstot sprieguma apzīmējumu ( $u$ ,  $u_L$ ,  $u_C$ ,  $U$ ,  $U_L$ ,  $U_C$  utt.). Šāda apzīmējuma (1.5.a att.) priekšrocība: var izvēlēties jebkuru indeksu; trūkums: shēmā jāzīmē bultiņa un jāpieraksta apzīmējums;
  - **ar diviem indeksiem** apzīmējumā, shēmā tikai apzīmējot attiecīgos divus punktus (1.5.b att). Pieņemto pozitīvo virzienu formulās norāda ar indeksu secību. Priekšrocība: shēmā ir mazāk bultiņu un apzīmējumu; trūkums: apzīmējumā noteikti jālieto divi indeksi ( $u_{AB}$ ,  $U_{12}$  utt.).
- Arī spriegums ir shēmas, nevis atsevišķa tās elementa "īpašums". Ja paralēli slēgti vairāki elementi, tad uz tiem ir viens un tas pats spriegums.

### Četru elementu vienādojumi

Elementu vienādojumu izteiksmes pazīstamas no fizikas kursa. Elektrotehnikas kursā analizē shēmas, kas visbiežāk ir sarežģītākas par pazīstamo "pilno ķēdi" – ar lielāku strāvu un spriegumu skaitu. Šeit elementu vienādojumi vēl jāpapildina ar vienošanos par elektrisko lielumu pieņemtajiem virzieniem. Tas nepieciešams, lai pareizi saskaitītu spriegumus vai strāvas shēmas struktūras vienādojumos: (1.5) un (1.6).

Elementa EDS vienādojums

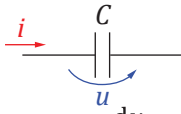
$$u = -e \quad (1.1)$$

Rezistīva elementa  $R$  vienādojums

$$u = Ri \quad (1.2)$$

Induktīva elementa  $L$  vienādojums

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (1.3)$$

Kapacitīva elementa  $C$  vienādojums 

$$i = C \frac{du}{dt} \quad (1.4)$$

Paskaidrojot **EDS vienādojumu** (1.1), pietiek atgādināt EDS un sprieguma īpašības: potenciāla vērtība pieaug EDS bultiņas virzienā par  $e$  voltiem, bet samazinās sprieguma bultiņas virzienā par  $u$  voltiem.

Spriegums uz **rezistīva elementa**  $R$  ir proporcionāls strāvai  $i$  (1.2).

**Induktīva elementa**  $L$  vienādojums (1.3) rāda, ka spriegums  $u$  uz induktīvā elementa  $L$  ir proporcionāls nevis strāvai  $i$ , bet tās atvasinājumam jeb izmaiņas ātrumam. Piemēram, ja strāva laikā nemainās, spriegums uz elementa  $L$  ir vienāds ar nulli. Ja strāva laikā lineāri samazinās, tad spriegumam uz elementa  $L$  būs konstanta negatīva vērtība. Ja strāva laikā mainās sinusoidāli, tad spriegums uz induktīva elementa  $L$  laikā mainās pēc kosinusa likuma. Visas šīs situācijas sastapsim nākošajās nodaļās.

**Kapacitīva elementa**  $C$  vienādojums (1.4) nozīmē, ka strāva  $i$  tajā ir atkarīga no sprieguma izmaiņas ātruma. Piemēram, līdzstrāvas ķēdē – tajā kondensatora spriegums  $u$  nemainās – strāva kondensatorā neplūst.

Lietojot elementu vienādojumus (1.1)–(1.4), jāievēro, ka:

- formulas ir spēkā tikai elektrisko lielumu ( $u, i, e$ ) **momentānajām vērtībām** (nedrīkst tās automātiski attiecināt uz vidējām vai vidējām kvadrātiskām vērtībām);
- katrā no formulām ir divi **viena un tā paša elementa** elektriskie lielumi,
- ja abu formulā lietojamo elektrisko lielumu bultiņu virzieni (t. i., **pieņemtie virzieni**) ir savstarpēji pretēji, tad **formulā** dotā plusa vai mīnusa zīme jāmaina uz pretējo.

Elementu vienādojumi ir spēkā jebkurai aizvietošanas shēmai ar lineāriem elementiem  $R, L$  un  $C$  līdzstrāvas, maiņstrāvas un trīsfāžu maiņstrāvas ķēdēs kā stacionāros režīmos, tā arī pārejas procesos. Tos nepārveidotus izmantosim, analizējot pārejas procesus. Uz vienādojumu (1.1)–(1.4) pamata, kā parādīts nākamajās nodaļās, iegūst dažkārt ne vienkāršākas, bet vienmēr atvasinājumus nesaturošas sakarības līdzstrāvas un maiņstrāvas ķēžu aprēķinam stacionārā režīmā.

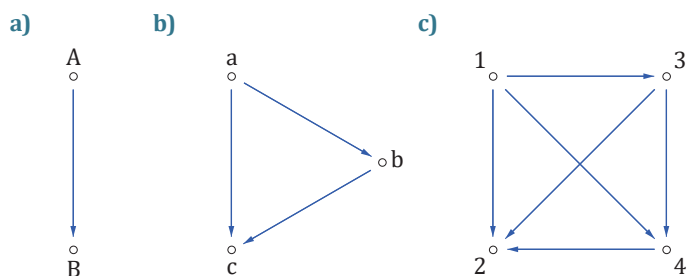
## Elektrisko ķēžu topoloģija

### Spriegumu skaits shēmā

Iepazīstoties ar aprēķināmo shēmu, vispirms uzzina **spriegumu un strāvu skaitu** tajā, lai pēc tam katram spriegumam un strāvai piešķirtu individuālu apzīmējumu un to pievienotu shēmai. Izdariet to uzmanīgi, lai vienu un to pašu spriegumu vai strāvu neapzīmētu atkārtoti, līdz ar to nevajadzīgi padarot shēmu sarežģītāku.

Strāvu skaita noteikšana parasti nesagādā grūtības: visos **nesazarota shēmas posma elementos un vados ir viena un tā pati strāva**. Sarežģītāka ir ideja, ka divpolā ieejošā strāva ir vienāda ar no tā izejošo strāvu. Piemēram, strāva no avota ir tā pati, kas tajā atgriežas pa citu vadu.

Spriegums ir divu shēmas punktu potenciālu starpība, tātad spriegumu skaitu nosaka punktu skaits shēmā, kā tas parādīts 1.6. attēlā.

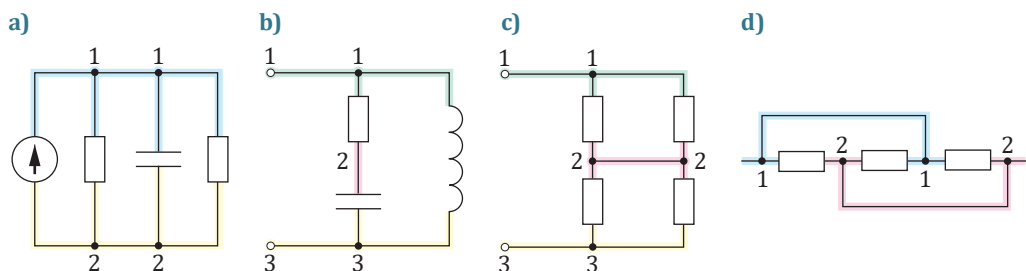


**1.6. att.** Spriegumu skaitu nosaka punktu skaits shēmā:  
divi punkti – viens spriegums  $u_{AB}$  (a),  
trīs punkti – trīs spriegumi  $u_{ab}$ ,  $u_{bc}$ ,  $u_{ac}$  (b),  
četri punkti – seši spriegumi  $u_{12}$ ,  $u_{13}$ ,  $u_{14}$  utt. (c).

Ko uzskatīt par punktu

Sākumā iepriecinoša ziņa: elektriskā ķēde ir nesalīdzināmi vienkāršāks objekts par elektrisko lauku. Elektriskajā laukā ir bezgalīgi daudz punktu, un katram no tiem var būt atšķirīgs potenciāls. Elektriskajā laukā potenciāls ir atkarīgs no laika  $t$  un arī no punkta koordinātām ( $x$ ;  $y$ ;  $z$ ), un aprēķinos jālieto sarežģīts matemātiskais aparāts – parciālie diferenciālvienādojumi, bet elektriskajā ķēdē lielumi ir tikai laika  $t$  funkcijas, un tos apraksta parastie diferenciālvienādojumi. Nākamajās nodaļās parādīts, kā aprēķinos var izvairīties pat no parasto diferenciālvienādojumu risināšanas.

Elektriskās ķēdes aizvietošanas shēmā punktu skaits, kam varētu būt dažādi potenciāli, ir neliels. Piemēram, samērā sarežģītā trīsfāžu ķēdē – tādu parasti pēta laboratorijas darbā – ir ne vairāk kā pieci punkti.



**1.7. att.** Punktu skaits shēmā: visam vadam vai kopā savienotiem vadiem ir viens un tas pats potenciāls!

## Kas ir punkts

Tā ir vieta shēmā, kuras potenciāls var atšķirties no citu punktu potenciāliem. Aizvietošanas shēmas vadi ir ideāli, t. i., tiem nav pretestības ( $R = 0 \Omega$ ). Uz vada neatkarīgi no tā garuma (kaut vai vadu savēlot punktā) ir viens un tas pats potenciāls. Savienojot vairākus vadus (izveidojot mezgla punktu), arī uz visiem savienotajiem vadiem ir viens un tas pats potenciāls.

## Kā meklēt punktus shēmā

Ievērojot sacīto, punkts ir: 1) mezgla punktā savienoti vismaz trīs vadi; 2) vads, kas savieno divus elementus; 3) vienam elementam pievienots vads.

Tiem, kas vēl atrodas maldīga priekšstata varā, ka vadi nevis savieno elementus, bet iet cauri elementiem (izrādās, ka pastāv arī tāds uzskats), varu piedāvāt vienkāršāku, īsāku, bet arī pareizu punkta definīciju: **punkts ir elementu savienojuma vieta vai brīvs (nekam nepievienots) elementa izvads.**

## Atrodam punktus četrās shēmās

1.7.a attēla shēmā ir divi punkti, tātad tikai viens spriegums  $U_{12}$ , bet nākamajās divās shēmās – trīs punkti un trīs spriegumi:  $U_{12}$ ,  $U_{23}$  un  $U_{13}$ . Pēdējais shēmas fragments (1.7.d att.) ir viltīgi nomaskēts trīs rezistoru paralēlslēgums. Ikviens no tiem ir pievienots punktam 1 un 2, tātad elementi ir slēgti paralēli. Pamēģiniet uzzīmēt shēmu, kurā ir divi punkti un trīs rezistori. Visticamāk, iegūsiet 2.4. attēla shēmu. Abas shēmas ir topoloģiski līdzvērtīgas.

Protams, shēmas topoloģisko punktu (ar dažādiem iespējamiem potenciāliem) skaitam nav nekā kopīga ar punktiem, kas shēmā jāuzliek katram mezglam (trīs un vairāk vadu savienojuma vietai).

## Aizvietošanas shēmu topoloģijas pamatjēdzieni

Lai aprēķinātu kādu konkrētu shēmu, nepietiek ar atsevišķu **elementu vienādojumiem**: ir nepieciešami arī vienādojumi, kuros ievērota shēmas struktūra jeb topoloģija. Iepazīsimies ar elektrisko shēmu topoloģijas pamatjēdzieniem. Tie ir: punkts, mezgls, zars, kontūrs un divpols.

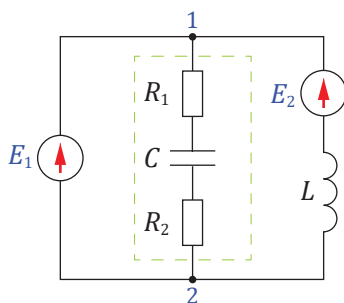
**Punkts** – šo jēdzienu aplūkojām iepriekš. 1960. gadu beigās, gatavojot pirmās lekcijas, sāku saprast, ka tam ir jābūt visās shēmu topoloģijas pamatā – elektriskis tieši ar punktu palīdzību orientējas shēmās. Interesanti bija vēlāk novērot, ka **nevienā** padomju un postpadomju mācību grāmatā (līdz pat šai dienai) šī jēdziena nav. Bet vēl interesantāk – ka ar punkta jēdzienu sākas topoloģijas jēdzienu skaidrojums **visās** ASV un Rietumeiropas mācību grāmatās.

**Mezgls** – trīs vai vairāk vadu savienojuma vieta. Kopā savienotus mezglus var uzskatīt par vienu mezglu. 1.8. attēla shēmā no pieciem tās punktiem divi (1 un 2) ir mezgli.

**Zars** – shēmas daļa, kas pievienota diviem mezgliem. Zarā var būt viens elements vai vairāki virknē slēgti elementi. Virknes slēguma jēdzienu vēl iztirzāsim. 1.8. attēla shēmā starp mezgliem 1 un 2 ir trīs zari.

**Kontūrs** – noslēgts ceļš shēmā, kas iet pa shēmas elementiem un savienotājiem. 1.8. attēla shēmā ir trīs kontūri, kas noslēdzas: 1) pa elementiem  $E_1, R_1, C, R_2$ , atgriežoties pie  $E_1$ ; 2) pa elementiem  $R_1, C, R_2, L, E_2, R_1$ ; 3) pa elementiem  $E_1, E_2, L, E_1$ . Kontūram brīvi izvēlas apejas virzienu. Izsekojiet aplūkoto trīs kontūru apejas virzieniem, spriežot pēc elementu saraksta. Kuru no tiem apiet pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam?

**Divpols** – shēmas daļa, kuras divus punktus (izvadus, polus) ar pārējo shēmu savieno **divi vadi**. Piemērs 1.8 attēla shēmā: divpols ar elementiem  $R_1, C$  un  $R_2$ . Divpolu, kurā ir vismaz viens EDS avots, sauc par aktīvu divpolu. Ja divpolā nav neviena EDS avota, tad – par pasīvu divpolu. Vienkāršākie divpoli ir aizvietošanas shēmu elementi, jo katram no tiem ir divi izvadi.



**1.8. att.** Ilustrācija shēmu topoloģijas pamatjēdzieniem.

Attēlā parādīta shēma ar 5 punktiem, 2 mezgliem, 3 zariem un 3 kontūriem.

Katrā zarā ir sava strāva. Shēmā ir 10 spriegumi.

Uzskatot elementu  $R_1, C$  un  $R_2$  savienojumu par pasīvu divpolu, shēmas topoloģija ievērojami vienkāršojas: tad tajā ir tikai 3 punkti un 3 spriegumi.

Kā izmanto shēmu topoloģijas pamatjēdzienus

**Punktu** skaits nosaka spriegumu skaitu shēmā.

**Mezglam** var sastādīt strāvu vienādojumu pēc Kirhofa pirmā likuma. Mezgla jēdzienu arī izmantosim, definējot elementu virknes slēgumu.

**Zars** ir shēmas posms, kurā visos tā elementos un vados ir viena un tā pati strāva. Arī tad, ja zarā ir vairāki elementi, zarā parāda tikai vienu strāvas bultiņu.

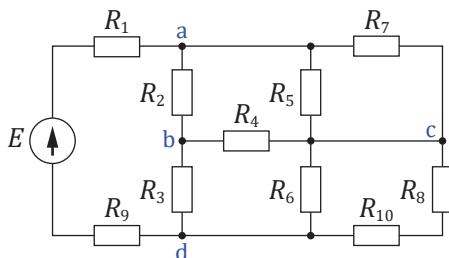
**Kontūram** var sastādīt vienādojumu pēc Kirhofa otrā likuma.

**Divpola** jēdzienu izmanto, ekvivalenti aizstājot veselu shēmas daļu ar vienkāršāku. Piemērs: ekvivalentā ģenerators metode (2. nodaļā), kurā lielāko shēmas daļu aizstāj ar vienu avotu. Divpolu raksturo viens spriegums un viena strāva.

Vienkāršākie slēgumu veidi (vingrinājums)

Pamēģiniet atbildēt uz jautājumiem par 1.9. attēla shēmas elementu slēgumiem. Kā savienots elementu pāris  $R_1$  un  $R_7$ : virknē, paralēli vai ne virknē, nedz arī paralēli? Pierakstiet atbildi. Pēc tam novērtējiet slēguma veidu elementu pāriem:  $R_1$  un  $R_9, R_2$  un  $R_3, R_2$  un  $R_5, R_5$  un  $R_7, R_6$  un  $R_8, R_8$  un  $R_{10}$ .

Apkopojiet rezultātus: cik virknes slēgumus un cik paralēlslēgumus aplūkotajos elementu pāros atradāt? Parasti šis tests dod vispārsteidzošākos rezultātus. Tāpēc izlasiet zemāk piedāvātās abu slēgumu definīcijas un pārbaudiet atbildes.



1.9. att. Atrodiet šajā shēmā virknē un paralēli slēgtus elementus!

Elementi ir savienoti paralēli, ja tiem ir **divi kopēji punkti**. Piemēram,  $R_2$  un  $R_5$  nav slēgti paralēli, jo tiem ir tikai viens kopējs punkts ( $a$ ).  $R_1$  un  $R_9$  nevar būt savienoti paralēli, jo tiem vispār nav kopēju punktu. Arī  $R_6$  ar  $R_8$  nav savienoti paralēli, jo tiem ir tikai viens kopējs punkts ( $c$ ). Savukārt elementi  $R_5$  un  $R_7$  ir slēgti paralēli, jo tiem ir divi kopēji punkti ( $a$  un  $c$ ). Uz paralēli slēgtiem elementiem ir **viens un tas pats spriegums**.

Elementi ir savienoti virknē, ja shēmā eksistē ceļš no viena elementa līdz otram (pa savienotājdabiem un caur elementiem), kurā nav mezglu (t. i., **ceļā nav atzarojumu**). Piemēram,  $R_1$  nav slēgts virknē ar  $R_7$ , jo nekādi nav iespējams nokļūt no  $R_1$  līdz  $R_7$ , izvairoties no mezgliem. Virknē savienotos elementos ir **viena un tā pati strāva**.

Pamēģiniet vēlreiz atbildēt uz iepriekšējiem jautājumiem, izmantojot dotās virknes un paralēlslēguma definīcijas. Tagad nebūs grūti atrast, ka paralēli slēgti ir tikai  $R_5$  ar  $R_7$  (kopēji punkti ir  $a$  un  $c$ ). Ir divi virknes slēgumi:  $R_1$  un  $R_9$ ,  $R_8$  un  $R_{10}$ .

Un vēl viens jautājums: cik 1.9. attēla shēmā punktu? Septiņi, ja neklūdos. Pārbaudiet.

## Spriegumu un strāvu vienādojumi

### Spriegumu vienādojumu sastādīšana

Spriegums ir divu shēmas punktu potenciālu starpība. Zinot to, principā iespējams sastādīt jebkuru spriegumu vienādojumu. Elektrisko ķēžu aprēķinos potenciālus neizmanto, tādēļ lietosim pašu vienkāršāko izteiksmi, kas aizstāj minēto sprieguma definīciju, bet potenciālus nesatur.

#### Spriegumu vienādojums

$$u_{13} = u_{12} + u_{23}, \quad (1.5)$$

kur 1, 2 un 3 – brīvi izvēlētu shēmas punktu apzīmējumi.

Pārliecināties, ka spriegumu vienādojums (1.5) tiešām izriet no sprieguma definīcijas:

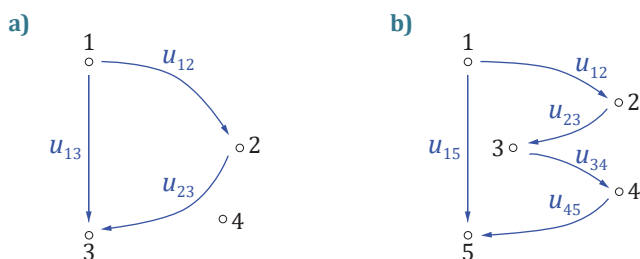
$$u_{12} + u_{23} = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) = \varphi_1 - \varphi_3 = u_{13}.$$

Izmantojot vienādojumu (1.5), jebkuru spriegumu var izteikt arī kā **vairāku** spriegumu summu. Apzīmējot brīvi izvēlētus shēmas punktus ar secīgiem indeksiem (1, 2, ..., n - 1, n), spriegumu vienādojumu var uzrakstīt šādā formā:

$$u_{1n} = u_{12} + u_{23} + \dots + u_{n-1,n}. \quad (1.5')$$

Piemēram, jebkurai shēmai ar vismaz 5 punktiem pareizs ir vienādojums:

$$u_{15} = u_{12} + u_{23} + u_{34} + u_{45}.$$



**1.10. att.** Ilustrācija spriegumu vienādojuma sastādīšanai: spriegums starp punktu 1 un 3 ir vienāds ar divu citu spriegumu summu (a), spriegums  $u_{15}$  kā četru spriegumu summa (b).

Vienādojumu izveidošanas principu ilustrē 1.10.b attēls. Ja spriegums vienādojuma kreisajā pusē ir, piemēram,  $u_{15}$ , tad labajā pusē 1) pirmā sprieguma bultiņai jāsākas punktā 1; 2) katra nākošā sprieguma bultiņai jāsākas punktā, uz kuru norāda iepriekšējā sprieguma bultiņa; 3) pēdējā sprieguma bultiņai jānorāda uz punktu 5. Tas pats citiem vārdiem: vienādojuma labajā pusē katra sprieguma (sākot ar otro) pirmais indekss sakrīt ar iepriekšējā sprieguma otro indeksu.

Spriegumu vienādojumu piemērus varēsiet pārbaudīt 2. nodaļas 2.2. attēla shēmām.

## Kirhofa spriegumu vienādojums

1847. gadā jaunais vācu zinātnieks Gustavs Roberts Kirhofs publicēja līdzstrāvas ķēžu aprēķina metodi, ar ko tad arī sākās elektrisko ķēžu teorija. Metodes pamatā ir divi vienādojumu tipi: Kirhofa strāvu vienādojums (citi nosaukumi: Kirhofa vienādojums mezglam, Kirhofa pirmais likums) un Kirhofa spriegumu vienādojums (citi nosaukumi: Kirhofa vienādojums kontūram, Kirhofa otrais likums). Šajā nodaļā aplūkojam tikai vienādojumus, kas derīgi visām ķēdēm, tāpēc Kirhofa spriegumu vienādojuma oriģinālajam formulējumam varēsim pievērsties tikai 2. nodaļā. Elektrotehnikai attīstoties, izrādījās, ka aprēķina metode lietojama ne tikai līdzstrāvas ķēdēm, vienīgi Kirhofa sprieguma vienādojumam bija vajadzīgs vispārīgāks formulējums: jebkurā momentā **visu kontūra elementu spriegumu summa ir vienāda ar nulli**. Ja visu spriegumu pieņemtie pozitīvie virzieni sakrīt ar izvēlēto kontūra apejas virzienu, tad

$$\sum u = 0. \quad (1.5a)$$

Kirhofa spriegumu vienādojums faktiski ir spriegumu vienādojuma (1.5') speciālgadījums. Vienādojumā (1.5') punkti vispār nav saistīti ar kontūru, to skaitu var izvēlēties



brīvi. Turpretim Kirhofa otrais likums attiecas uz noslēgtu kontūru un liek izvēlēties visus punktus tajā. Apejot kontūru, summē visu kontūra elementu spriegumus. Tā kā kontūrs sākas un beidzas vienā punktā, tad saskaņā ar (1.5') spriegumu summa tiešām būs vienāda ar nulli.

Pamatvienādojumu tabulā ievietojam spriegumu vienādojumu (1.5), nevis Kirhofa spriegumu vienādojumu (1.5a) šādu apsvērumu dēļ. Vienādojumam (1.5a) ir specifisks lietojums: strāvu aprēķināšana shēmās ar vairākiem avotiem, izmantojot Kirhofa vienādojumu metodi vai tai radniecisko kontūrstrāvu metodi. Vienādojumu (1.5) turpretim izmantosim uz katra soļa, nerunājot nemaz par to, ka (1.5a) izriet no (1.5), nevis otrādi.

### Kirhofa strāvu vienādojums

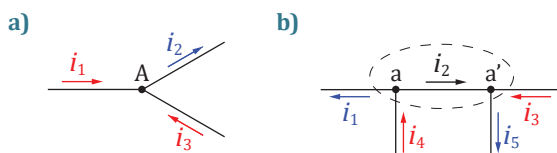
Kirhofa strāvu vienādojumu jeb Kirhofa pirmo likumu sastāda sazarotas ķēdes mezglam: strāvu **momentāno** vērtību **algebriskā summa** shēmas **mezglā** ir vienāda ar nulli.

$$\sum \pm i = 0. \quad (1.6)$$

“Algebriskā summa” nozīmē to, ka strāvām, kuru bultiņas (t. i., pieņemtie pozitīvie virzieni) vērstas uz mezglu, vienādojumā piešķir vienu (piemēram, plusa) zīmi, bet pārējām strāvām – pretēju zīmi.

1.11.a attēla shēmā strāvu  $i_1$  un  $i_3$  bultiņas vērstas mezgla A virzienā. Tām vienādojumā piešķir plusa zīmi. Strāva  $i_2$  vērsta prom no mezgla A, tāpēc tai vienādojumā piešķir mīnusa zīmi:

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0.$$



**1.11. att.** Strāvu vienādojuma sastādīšana: ķēdes mezglam (a), apvienojot divus savienotus mezglus (b).

1.11.b attēlā parādīts shēmas fragments ar diviem savienotiem mezgliem a un a'. Strāvu vienādojuma izteiksme katram no tiem:

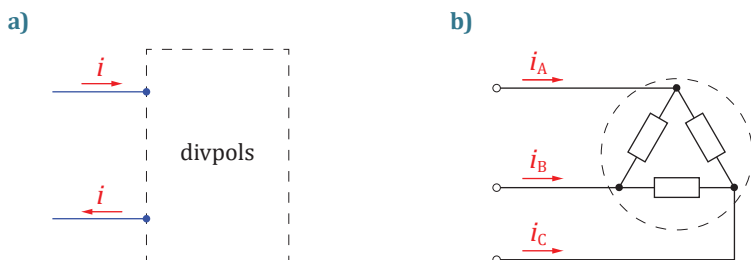
$$-i_1 - i_2 + i_4 = 0, \quad i_2 + i_3 - i_5 = 0.$$

Ievērojiet, ka abiem mezgliem ir viens un tas pats potenciāls. Ja uzdevums nav uzziņāt arī strāvas  $i_2$  vērtību, tos var “savilkt vienā punktā” vai arī aplūkot kā “supermezglu” – ar raustīto līniju ierobežoto shēmas daļu. Tad iegūstam vienādojumu:

$$-i_1 + i_3 + i_4 - i_5 = 0.$$

Līdzīgi strāvu vienādojumu var sastādīt **šķēlumam** – shēmas daļai, ko ierobežo iedomāta **noslēgta līnija**, kas šķērso savienotāјvadu, bet ne shēmas elementus un mezglus. Jebkurā momentā arī **noslēgtai shēmas daļai** pienākošo strāvu summa ir vienāda ar aizejošo strāvu summu. Pirms Kirhofa vācu zinātnieks Kārlis Frīdrihs Gauss jau bija formulējis līdzīgu teorēmu elektriskā lauka intensitātes plūsmai caur slēgtu virsmu (**Gausa virsmu**).

Strāvu vienādojumu šķēlumam aprēķinos gandrīz nelieto. Taču parādīšu divus piemērus, kad tas tiešām ir noderīgs. 1.12.a attēls rāda, ka divpolā ieejošā strāva vienāda ar izejošo strāvu. 1.12.b attēlā parādīts trīsfāžu sistēmas fragments ar trīs līnijas strāvām. Patērētājam (norobežotajai shēmas daļai) pienākošo strāvu momentāno vērtību summa ir vienāda ar nulli.



**1.12. att.** Strāvu vienādojumu speciālgadījumi: divpola ieejošā strāva ir vienāda ar no tā izejošo strāvu (a), līnijas strāvu summa trīsvadu sistēmā ir vienāda ar nulli (b).

## Divpola momentānā jauda

Elektriskajā ķēdē nepārtraukti notiek procesi ar enerģijas pāreju no viena veida otrā. Līdzstrāvai plūstot rezistorā, elektriskā enerģija neatgriezeniski pārveidojas siltumenerģijā. Maiņstrāvas ķēdēs un pārejas procesos arī spoles un kondensatori piedalās enerģijas apmaiņas un pārveidošanas procesos. Induktivitātes spolē strāva rada magnētisko lauku, kura enerģija ir proporcionāla strāvas kvadrātam ( $i^2$ ). Kondensatora uzkrātā elektriskā lauka enerģija ir proporcionāla kondensatora sprieguma kvadrātam ( $u^2$ ).

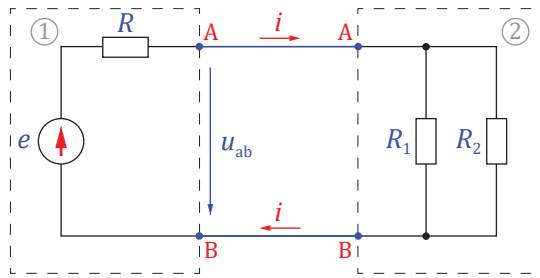
Šo procesu norises ātrumu (intensitāti) raksturo jauda  $p$ , un to mērī vatos (W).

Divpola ģenerētā vai patērētā jauda  $p$  (1.7) jebkurā momentā ir proporcionāla abiem divpola elektriskajiem lielumiem – sprieguma  $u$  un strāvas  $i$  momentānajām vērtībām.

### Divpola jauda

$$p = ui. \tag{1.7}$$

Ja sprieguma un strāvas pieņemtie virzieni divpolā **sakrīt**, tad divpols nosacīti ir patērētājs. Izmantojot formulu (1.7), aprēķina divpola **patērēto** jaudu. 1.13. attēlā tāds ir otrais divpols, jo **tajā** strāvas  $i$  virziens (uz leju) sakrīt ar tādu pašu sprieguma  $u_{AB}$  virzienu.



1.13. att. Aktīvs divpols (1) – tajā ir EDS avots; pasīvs divpols (2) – tajā avotu nav.

Ja sprieguma un strāvas pieņemtie virzieni divpolā **ir pretēji**, tad divpols nosacīti ir avots. Izmantojot formulu (1.7), aprēķina divpola **ģenerēto** jaudu. 1.13. attēlā tāds ir pirmais divpols. Ja aprēķinā iegūtā jaudas  $p$  vērtība ir negatīva, tas nozīmē, ka dotajā momentā nosacītais divpols jaudu nevis ģenerē, bet patērē.

Kopsavilkums: formulu tabula

Vienādojumi	Momentānajām vērtībām	
Elementu vienādojumi	$u = -e$	(1.1)
	$u = Ri$	(1.2)
	$u = L \frac{di}{dt}$	(1.3)
	$i = C \frac{du}{dt}$	(1.4)
Spriegumu un strāvu vienādojumi	$u_{13} = u_{12} + u_{23}$	(1.5)
	$\sum \pm i = 0$	(1.6)
Divpola jauda	$p = ui$	(1.7)

Formulu tabulā ir septiņi vienādojumi:

- četri **elementu vienādojumi** (1.1)–(1.4),
- spriegumu (strāvu) vienādojumi (1.5) un (1.6) – sakarības starp **dažādu elementu** vai shēmas daļu spriegumiem (strāvām),
- **jaudas formula** (1.7), kas nosaka ķēdes daļas (divpola) momentāno jaudu.

Formulu pieejamība vēl ne tuvu negarantē to pareizu lietošanu. Šajā nodaļā tika izskaidrots, kā septiņi pamatvienādojumi lietojami. Iepazināties ar elementu un elektrisko lielumu **apzīmēšanu** shēmās un tekstā, aplūkojām jautājumu par **zīmēm** formulās un noskaidrojām aizvietošanas shēmu **topoloģijas** jēdzienus.

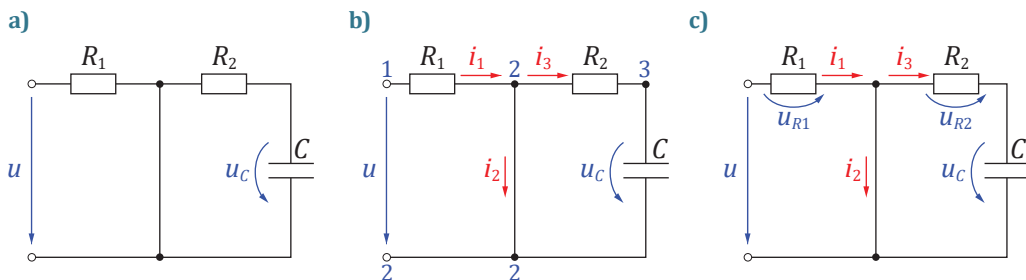
Vienādojumi (1.1)–(1.7) ir spēkā gan **stacionāriem režīmiem** lineārās **līdzstrāvas** un **maiņstrāvas** ķēdēs, gan arī **pārejas procesiem**. Sarežģītākās situācijās tos izmanto nepārveidotus, piemēram, pārejas procesu aprēķinos. Atvasinājumi elementu vienādojumos novestu pie diferenciālvienādojumu sastādīšanas un risināšanas. Lai no tā izvairītos, stacionāru režīmu aprēķiniem **pamatvienādojumus pārveido**.

Arī tad vienādojumu tabulas struktūra (elementu vienādojumi, spriegumu un strāvu vienādojumi, divpola jaudas formula) saglabājas, kaut arī paši vienādojumi dažkārt ievērojami izmainās.

Turpmāk pievērsiet uzmanību tam, ka daudzie elektrisko ķēžu vienādojumi faktiski ir tie paši septiņi pamatvienādojumi – pārveidotā formā, bet ar tiem pašiem lietošanas noteikumiem. Tā dēvētā teorija būtībā ir ceļš no pamatvienādojumiem uz inženiermetodēm. Tam izsekosim nākamajās nodaļās.

## Aģitācija trīs formulu izmantošanai

Nodaļas noslēgumā pavērosim, kā “strādā” dažas izklāstītās idejas (ne tikai formulas), aprēķinot konkrētu shēmu. Aplūkojam kādu laika momentu 1.14.a attēla shēmā. Zināma avota sprieguma vērtība  $u = 120$  V. Shēmā notiek kondensatora  $C$  izlāde, sprieguma  $u_c$  momentānā vērtība  $u_c = 80$  V. Pretestību vērtības:  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ . Jāaprēķina visu strāvu vērtības šajā momentā.



**1.14. att.** Aprēķināmā shēma (a), shēma ar apzīmējumiem (b), izvēlēts cits spriegumu apzīmēšanas veids (c).

Vispirms strāvas un spriegumi jāapzīmē (1.14.b att.). Atrodam, ka shēmā ir **trīs punkti** (1, 2 un 3), un apzīmējam tos. Atcerēsimies, ka uz vada un uz kopā savienotiem vadiem ir kopējs potenciāls – šeit punkts 2 ir uz veseliem pieciem vadiem (pārlicinieties!) visā to garumā. Līdz ar to visi **spriegumi ir apzīmēti**: uz rezistora  $R_1$  ir spriegums  $u_{12}$ , uz rezistora  $R_2$  – spriegums  $u_{23}$  un uz vada 2–2, protams,  $u_{22} = 0$  V.

Apzīmējam shēmā **strāvas** (momentānās vērtības apzīmē ar mazajiem burtiem). Katrā no **trim zariem** ir viena kopēja strāva. Pirmais zars ar strāvu  $i_1$  ved pa horizontālo vadu 2–2 pa kreisi, pa avotu  $u$  uz augšu, caur rezistoru  $R_1$  pa labi līdz mezglam 2. Otrs zars ar strāvu  $i_2$  ir vertikālais vads 2–2. Trešais zars ar strāvu  $i_3$  ved no augšējā mezgla 2 pa elementiem  $R_2$  un  $C$  līdz apakšējam mezglam 2. Strāvu bultiņu virzienus izvēlas brīvi. Šeit dota priekšroka virzienam no avota  $u$  augšējā izvada 1.

Sākam aprēķināt shēmu (1.14.b att.). Rezistors  $R_1$  tāpat kā avots  $u$  ieslēgts starp punktiem 1 un 2, tāpēc spriegums uz  $R_1$  strāvas  $i_1$  virzienā  $u_{12} = u$ . Strāvu  $i_1$  atrodam, piemērojot **vienādojumu (1.2)** rezistoram  $R_1$ :

$$i_1 = \frac{u_{12}}{R_1} = \frac{u}{R_1} = \frac{120}{20} = 6 \text{ A.}$$

Lai aprēķinātu strāvu  $i_3$ , jāzina sprieguma  $u_{23}$  vērtība. To atrod saskaņā ar **spriegumu vienādojumu (1.5)**, ievērojot, ka spriegums starp vertikālā vada 2-2 galiem  $u_{22} = 0$  V:

$$u_{22} = 0 = u_{23} + u_c, \quad u_{23} = -u_c = -80 \text{ V.}$$

Strāvu  $i_3$  atrodam, piemērojot **vienādojumu (1.2)** rezistoram  $R_2$ :

$$i_3 = \frac{u_{23}}{R_2} = \frac{-80}{10} = -8 \text{ A.}$$

Negatīva strāvas  $i_3$  vērtība nozīmē, ka dotajā momentā tās **faktiskais** virziens ir pretējs bultiņas virzienam – tātad pa kreisi. To tikai pieņem zināšanai, shēmu atstājot bez izmaiņām.

Strāvu  $i_2$  atrodam, izmantojot **strāvu vienādojumu (1.6)** augšējam mezglam 2. Zīmes vienādojumā nosaka tas, ka strāvas  $i_1$  bultiņa vērsta uz mezglu, bet pārējo strāvu bultiņas vērsta prom no mezgla:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \text{ A}, \quad i_2 = i_1 - i_3 = 6 - (-8) = 14 \text{ A.}$$

Shēma aprēķināta. Vienādojumi (1.2), (1.5) un (1.6) tekstā izcelti apzināti – pasvītrojot, ka līdzīga tipa vienkāršu shēmu aprēķinos bez **visiem** tiem parasti iztikt nevar. Ir vērts apgūt to lietošanu!

1.14.c attēlā parādīts, ka spriegumus apzīmēt var arī citādi – ar spriegumu bultiņām shēmā. Aprēķina gaitu tas neizmaina, izmainās vienīgi formulu pieraksts, piemēram:

$$i_1 = \frac{u_{R1}}{R_1} = \frac{u}{R_1}, \quad 0 = u_{R2} + u_c, \quad u_{R2} = -u_c, \quad i_3 = \frac{u_{R2}}{R_2}.$$



## levietojiet vispiemērotākos vārdus

1. Atkarībā no avota sprieguma veida izšķir ....., vienfāzes maiņstrāvas un ..... ķēdes.
2. Ķēdes ar diodēm, tranzistoriem u. c. ir ..... ķēdes.
3. Elektriskajās ķēdēs bez stacionāriem režīmiem sastopami arī..... ..
4. Elektriskās enerģijas avota galvenais raksturlielums ir ..... (EDS).
5. Elektriskie lielumi ir EDS, strāva, ..... un .....
6. Spriegumu atšķirībā no strāvas mērī ..... elektriskās ķēdes .....
7. Elektrisko ķēžu aprēķinam principshēmu vietā lieto ..... shēmas.
8. Aizvietošanas shēmās sastopami: EDS, ....., induktīvi un ..... elementi.
9. Ar mazajiem burtiem  $i$ ,  $u$ ,  $p$  apzīmē strāvas, sprieguma un jaudas ..... vērtību.
10. Strāvas vērtība ne tikai ķēdes pārtraukumā, bet arī posmos ..... un ..... pārtraukuma ir vienāda ar nulli.
11. EDS  $E$  ..... potenciālu bultiņas virzienā par  $E$  voltiem.
12. Septiņi aizvietošanas shēmu vienādojumi ir ..... elementu vienādojumi, ..... struktūras vienādojumi un divpola jaudas formula.
13. Apzīmējot spriegumu shēmā, jānorāda abi ..... un sprieguma pieņemtais .....
14. Aizvietošanas shēmās spriegums starp ikvienu ..... ir nulle.
15. EDS vienādojumā zīme nav atkarīga no pieņemtā ..... virziena.
16. Strāvu ..... vērtību algebriskā summa ..... vienāda ar .....
17. Punktu skaits shēmā nosaka ..... skaitu.
18. Virknes slēgums ir shēmas posms bez ..... punktiem.
19. Ķēdes elementi ir slēgti paralēli, ja tiem ir divi .....
20. Divpola jauda ir tā enerģijas izmaiņa .....

## Salīdziniet atbildes

1] līdzstrāvas, trīsfāžu maiņstrāvas; 2] nelineārās; 3] pārējas procesi; 4] elektrrodzīnējspēks; 5] spriegums, jauda; 6] starp diviem, punktiem; 7] aizvietošanas; 8] rezistīvi, kapacitīvi; 9] momentāno; 10] pirms, pēc; 11] paaugstina; 12] četri, divi; 13] punkti, virziens; 14] vada galim; 15] strāvas; 16] momentāno, mezglā, nulli; 17] spriegumu; 18] mezglu; 19] kopēji punkti; 20] laika vienība.

## 2. NODAĻA

### Līdzstrāvas ķēdes

Elektriskās ķēdes klasificē pēc enerģijas avota rakstura. **Līdzstrāvas ķēdēs** jebkura avota EDS vai spriegums laikā nemainās:  $u(t) = \text{const}$ . Šādu spriegumu sauc par **līdzspriegumu**. Stacionārā režīmā (nevis īslaicīgā pārejas procesā pēc ķēdes parametru izmaiņas) arī visi pārējie elektriskie lielumi (spriegumi, strāvas un jaudas) ķēdē ir konstanti. Par **līdzstrāvu** sauc lādiņu plūsmu ar laikā nemainīgu strāvas vērtību  $i = dq/dt = \text{const}$ . Laikā nemainīgus EDS, spriegumus, strāvas un jaudas **apzīmē ar lielajiem burtiem**:  $E, U, I$  un  $P$ . Šajā nodaļā aplūkotas līdzstrāvas ķēdes **stacionārā režīmā**. Pārejas procesi ķēdēs ar līdzstrāvas avotu aplūkoti 6. nodaļā.

---

Šajā nodaļā jūs iepazīsities ar

- līdzstrāvas ķēžu vienādojumiem stacionārā režīmā,
  - induktīvo un kapacitīvo elementu izslēgšanu no shēmas,
  - Kirhofa spriegumu vienādojumu līdzstrāvas ķēdēm,
  - līdzstrāvas ķēdes ar vienu sprieguma avotu aprēķinu,
  - sarežģītu līdzstrāvas ķēžu aprēķina un analīzes metodēm,
  - dažiem līdzstrāvas ķēžu lietojumiem un darba režīmiem.
- 

#### Līdzstrāvas ķēžu vienādojumi

Iepriekšējā nodaļā aizvietošanas shēmu vienādojumi (1.1)–(1.7) formulēti elektrisko lielumu momentānajām vērtībām ( $e, u, i, p$ ). Piemērojot tos laikā nemainīgiem EDS, spriegumiem, strāvām un jaudai līdzstrāvas ķēdēs, galvenokārt nāksies nomainīt tikai apzīmējumus ( $E, U, I, P$ ). Ievērojami izmainīsies tikai induktīvo un kapacitīvo elementu vienādojumi (2.3) un (2.4).

Līdzstrāvas ķēžu vienādojumi kopā ar 1. nodaļā apskatītajiem pamatvienādojumiem apkopoti 2.1. tabulā. Turpmāk tiks paskaidroti to lietošanas nosacījumi.

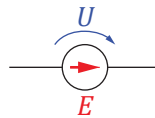
## Līdzstrāvas ķēžu vienādojumi

Vienādojumi	Momentānām vērtībām	Līdzstrāvai	
Elementu vienādojumi	$u = -e$	$U = -E$	(1.1), (2.1)
	$u = Ri$	$U = RI$	(1.2), (2.2)
	$u = L \frac{di}{dt}$	$U = 0$	(1.3), (2.3)
	$i = C \frac{du}{dt}$	$I = 0$	(1.4), (2.4)
Spriegumu un strāvu vienādojumi	$u_{13} = u_{12} + u_{23}$	$U_{13} = U_{12} + U_{23}$	(1.5), (2.5)
	$\sum \pm u = 0$	$\sum \pm E = \sum \pm RI$	(1.5a), (2.5a)
	$\sum \pm i = 0$	$\sum \pm I = 0$	(1.6), (2.6)
Divpola jauda	$p = ui$	$P = UI$	(1.7), (2.7)

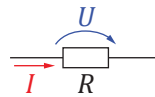
## Elementu vienādojumi

Pielāgojot EDS un rezistīva elementa  $R$  vienādojumus (1.1) un (1.2) līdzstrāvas ķēdēm, tajos tikai nomaina apzīmējumus, momentānās vērtības aizstājot ar konstantām vērtībām ( $U, I, E$ ). Kopā ar katru no elementu vienādojumiem (2.1) un (2.2) parādīts arī shēmas fragments ar elektrisko lielumu apzīmējumiem, lai uzsvērtu, ka, pirmkārt, formulā jālieto spriegums uz attiecīgā elementa un, otrkārt, formulā dotā zīme atbilst situācijai, kad abu elektrisko lielumu pieņemtie pozitīvie virzieni sakrīt.

Elementa  $E$  vienādojumā (2.1) dotā mīnusa zīme jālieto situācijā, kad EDS un sprieguma  $U$  pieņemtie pozitīvie virzieni (bultiņu virzieni shēmā) ir vienādi. Ievērojiet, ka zīme formulā nav atkarīga no pieņemtā **strāvas** virziena.

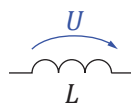


$$U = -E \quad (2.1)$$



$$U = RI \quad (2.2)$$

(2.2) ir rezistīva elementa  $R$  vienādojums. Šādu formu, kurā ir strāva, spriegums un proporcionalitātes koeficients – pretestība vai tai apgrieztais lielums vadītspēja –, sauc par Oma likuma izteiksmi.



$$U = 0 \quad (2.3)$$



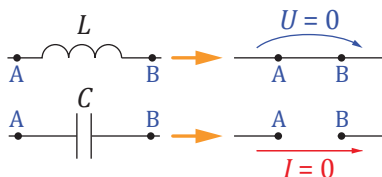
Induktīvā elementa vienādojumā (1.3) atvasināmā strāva  $i$  laikā nemainās, tāpēc līdzstrāvas ķēdē (protams, stacionārā režīmā, bet ne pārejas procesos) spriegums uz induktīva elementa ir vienāds ar nulli.



$$I = 0 \quad (2.4)$$

Kapacitīva elementa vienādojumā (1.4) atvasināmais spriegums  $u$  ir laikā nemainīgs, tāpēc līdzstrāva (stacionārā režīmā) caur kondensatoru neplūst.

Vienādojums (2.3) un (2.4) rāda, kā elementu  $L$  vai  $C$  izslēgt no līdzstrāvas ķēdes shēmas. Spriegums uz induktīva elementa tāpat kā uz vada ir vienāds ar nulli. Līdzstrāva visā zarā ar kondensatoru tāpat kā uz/no/caur ķēdes pārtraukumu neplūst. Tāpēc stacionāra līdzstrāvas režīma shēmā elementu  $L$  aizstāj ar vadu, bet elementu  $C$  – ar pārtraukumu (2.1. att.).



2.1. att. Elementu  $L$  un  $C$  aizstāšana shēmās.

Tātad līdzstrāvas ķēdēs, pirmkārt, četru elementu vietā ir tikai ar divi elementu tipi ( $E$  un  $R$ ) un, otrkārt, vienādojumi ievērojami vienkāršojas – tie nesatur atvasinājumus.

### Spriegumu vienādojumi

$$U_{13} = U_{12} + U_{23}, \quad (2.5)$$

kur 1, 2, 3 – **brīvi izvēlētu** shēmas punktu apzīmējumi.

No “tabulas vienādojuma” (2.5) izriet jebkurš spriegumu vienādojums līdzstrāvas ķēdei. Piemēram, jebkuru no spriegumiem var izteikt kā secīgu spriegumu summu:

$$U_{1n} = U_{12} + U_{23} + \dots + U_{n-1,n}. \quad (2.5')$$

**Secīgu spriegumu** rinda sākas punktā 1 (sprieguma  $U_{1n}$  pirmais indekss) un beidzas punktā  $n$  (sprieguma  $U_{1n}$  otrais indekss). Katrs nākamais spriegums sākas punktā, kur beidzas iepriekšējais.

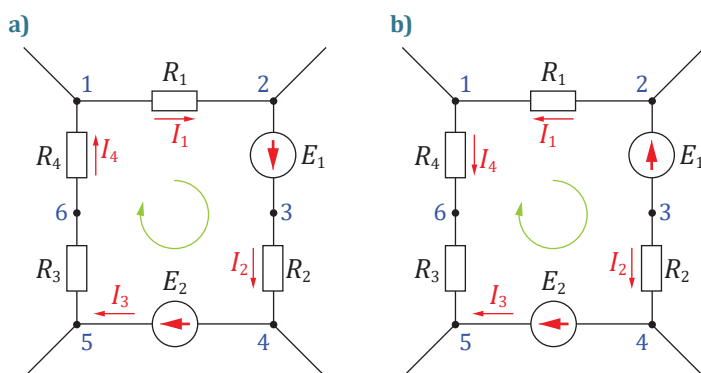
## Spriegumu vienādojuma lietošanas piemēri

2.2. attēla shēmās atšķiras strāvu virzieni. Spriegumu vienādojumi no tā nav atkarīgi un ir pareizi abām shēmām:

$$U_{15} = U_{12} + U_{25} = U_{13} + U_{35} = U_{14} + U_{45}, \quad U_{53} = U_{52} + U_{23} = U_{56} + U_{63} = U_{51} + U_{13},$$

$$U_{16} = U_{12} + U_{23} + U_{34} + U_{45} + U_{56} = U_{13} + U_{32} + U_{26}, \quad U_{52} = U_{51} + U_{13} + U_{32} \text{ utt.}$$

Iemācīties sastādīt spriegumu vienādojumus nav sarežģīti, bet ļoti noderīgi. Nekādā ziņā neatstājiet to bez ievēribas! Pārbaudiet četrus uzrakstītos spriegumu vienādojumus un pārlicinieties, ka tie sastādīti atbilstoši vienādojumam (2.5').



2.2. att. Kontūrs Kirchofa spriegumu vienādojuma izvedumam (a), piemērs (b).

### Kirchofa spriegumu vienādojums

Kirchofa spriegumu vienādojums (2.5a) – to sauc par Kirchofa likumu spriegumiem, Kirchofa likumu kontūram vai Kirchofa otro likumu – ir vienādojuma (2.5') speciālgadījums.

$$\sum \pm E = \sum \pm RI. \quad (2.5a)$$

**Noslēgtā kontūrā EDS algebriskā summa ir vienāda ar spriegumu kritumu uz rezistīvajiem elementiem (RI) algebrisko summu.** Plusa zīmi vienādojumā piešķir tiem EDS un strāvām, kuru pieņemtie (bultiņu) virzieni sakrīt ar kontūra apejas virzienu. Pārējiem – mīnusa zīmi.

### Kirchofa spriegumu vienādojuma pamatojums

Saskaņā ar (2.5') arī "spriegumu"  $U_{11} = 0$  V var izteikt ar secīgu spriegumu, kas sākas ar punktu "1" un atgriežas tajā pašā punktā "1", summu. Vienādojums (2.5') atļauj punktus izvēlēties patvaļīgi, taču, sastādot Kirchofa spriegumu vienādojumu, **izvēlas visus noslēgta kontūra punktus** (elementu savienojuma vietas), apejot kontūru izvēlētajā virzienā, kā tas redzams 2.2.a attēla shēmā. Visu kontūra apejas virzienā vērstu secīgu spriegumu summa ir vienāda ar nulli:  $\sum U = 0$ .

Kontūrā sastopami tikai spriegumi uz elementiem  $E$  un  $R$ . Sākumā pieņemam, ka visu EDS un strāvu pieņemtie virzieni (bultiņu virzieni 2.2.a att.) sakrīt ar kontūra apejas virzienu. Tas atļauj izmantot elementu vienādojumus (2.1) un (2.2), nemainot tajos zīmes:

$$\sum U = \sum U_R + \sum U_E = \sum RI + \sum (-E) = 0 \quad \rightarrow \quad \sum E = \sum RI.$$

Atsakoties no sākotnējā pieņēmuma (2.2.b att.), ka visu EDS un strāvu pieņemtie virzieni sakrīt ar kontūra apejas virzienu, iegūstam otrā Kirhofa likuma izteiksmi (2.5a).

### Strāvu vienādojums (Kirhofa pirmais likums)

Strāvu vienādojumu (2.6) – to sauc par Kirhofa likumu strāvām, Kirhofa likumu mezglam vai Kirhofa pirmo likumu – sastāda shēmas mezglam:

$$\sum \pm I = 0. \quad (2.6)$$

Vienādojumu formulē tāpat kā 1. nodaļā: **strāvu algebriskā summa mezglā ir vienāda ar nulli**. Algebriskā summa nozīmē: strāvas, kuru bultiņas shēmā vērstas uz mezglu, vienādojumā raksta ar plusa zīmi, pārējās – ar mīnusa zīmi.

Abus Kirhofa likumus – (2.5a) un (2.6) – izmanto vienādojumu sistēmas sastādīšanai, lai aprēķinātu strāvas sarežģītās līdzstrāvas ķēdēs ar **Kirhofa vienādojumu metodi** vai ar tās modifikāciju – kontūrstrāvu metodi. Atšķirībā no Kirhofa otrā likuma, Kirhofa pirmā likuma lietojums ir daudz plašāks – arī ķēdēs ar vienu avotu.

### Divpola jaudas formulas

Piemērojot divpola jaudas formulu (1.7) līdzstrāvas ķēdei, arī tajā tikai nomaina jaudas, sprieguma un strāvas momentānās vērtības ar konstantām vērtībām:

$$P = UI. \quad (2.7)$$

Abiem līdzstrāvas ķēdes elementiem ( $R$  un  $E$ ) jaudas formulu (2.7) var konkretizēt.

**Rezistīvs elements**  $R$  var būt tikai enerģijas patērētājs. No (2.7) un (2.2) izriet aprēķinam piemērotāka formula, kurā nav jāzina spriegums uz elementa  $R$ :

$$P = UI = RI^2.$$

**Elements**  $E$  ne vienmēr ir avots – tas var darboties arī patērētāja režīmā. Vienādi EDS un strāvas virzieni shēmā norāda uz **pieņēmumu**, ka EDS ir avots. Un otrādi: savstarpēji pretēji minētie virzieni norāda uz pieņēmumu, ka EDS ir patērētājs.

Tikai pēc tam, kad shēma aprēķināta, var uzzināt katra EDS **faktisko** režīmu. Tagad iespējams salīdzināt EDS un strāvas **faktiskos virzienus** (negatīva strāvas vai EDS vērtība nozīmē, ka lieluma patiesais virziens ir pretējs pieņemtajam). Ja strāvas un EDS faktiskie virzieni sakrīt, tad EDS tiešām ir avots. Pretējā gadījumā EDS darbojas kā patērētājs.

Abos gadījumos ģenerētā vai patērētā jauda saskaņā ar (2.1) un (2.7) ir skaitliski vienāda ar EDS un strāvas reizinājumu:

$$P = |UI| = |EI|.$$

Šajā formulā jālieto lielumu absolūtās vērtības, jo to zīmes ir jau iepriekš izmantotas – nosakot EDS un strāvas patiesos virzienus.

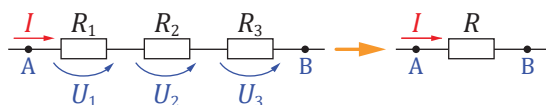
## Līdzstrāvas ķēžu ar vienu avotu aprēķins

### Ekvivalenti pārveidojumi līdzstrāvas ķēdē

Aprēķināt elektrisko ķēdi nozīmē: zinot avota sprieguma un visu pretestību vērtības, noteikt visas strāvas un, ja nepieciešams, spriegumu uz ķēdes posma un tā jaudu. Parasti aprēķina gaitā shēmu nepieciešams vienkāršot, izmantojot ekvivalentus pārveidojumus. Pārveidojums ir ekvivalents, ja shēmas nepārveidotajā daļā režīms (strāvas un spriegumi) neizmainās. Turpmāk aplūkotās virknes un paralēslēguma ekvivalento pārveidojumu izteiksmes.

### Virknes slēguma ekvivalentā pretestība

2.3. attēlā parādīta pretestību virknes slēguma pārveidošana, aizstājot to ar vienu ekvivalentu pretestību  $R$ .



2.3. att. Pretestību virknes slēguma ekvivalenta pārveidošana.

Lai pārveidojums būtu ekvivalents, strāvai  $I$  un pārveidojamā posma spriegumam  $U_{AB}$  jā saglabā iepriekšējās vērtības. Pielīdzinot atbilstoši vienādojumiem (2.5') un (2.2) sastādītas sprieguma  $U_{AB}$  izteiksmes abās shēmās:

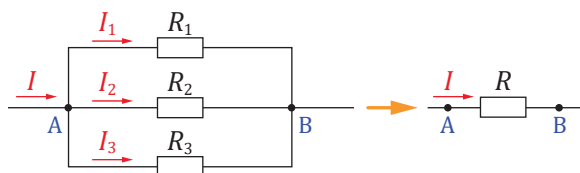
$$U_{AB} = RI \quad \text{un} \quad U_{AB} = U_1 + U_2 + U_3 = (R_1 + R_2 + R_3)I,$$

redzam, ka neatkarīgi no pretestību skaita **virknes slēguma ekvivalentā pretestība ir vienāda ar pretestību summu:**

$$R = R_1 + R_2 + \dots \quad (2.8)$$

### Paralēslēguma ekvivalentā pretestība

Shēmas daļu, ko veido vairākas paralēli savienotas pretestības  $R_1, R_2, R_3$  (2.4. att.), aizstājam ar vienu ekvivalentu pretestību  $R$ . Pieņemot vienādu sprieguma  $U_{AB}$  vērtību abās shēmās, arī strāvas  $I$  vērtība ekvivalentā pārveidojuma rezultātā nedrīkst izmainīties.



2.4. att. Rezistoru paralēlslēguma ekvivalenta pārveidošana.

Uzrakstām strāvas izteiksmes abām shēmām atbilstoši vienādojumiem (2.6) un (2.2) un salīdzinām tās:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U_{AB}}{R_1} + \frac{U_{AB}}{R_2} + \frac{U_{AB}}{R_3} = U_{AB} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right),$$

$$I = \frac{U_{AB}}{R}.$$

Tātad **paralēlslēguma ekvivalentā vadītspēja** ( $1/R$ ) **ir vienāda ar atsevišķo zaru vadītspēju summu**:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots \quad (2.9)$$

Ievērojiet, ka shēmas posmam paralēli pievienots rezistīvs elements  $R$  posma pretestību **samazina**. Šo faktu izmanto aprēķina rezultāta novērtēšanai: paralēlslēguma ekvivalentajai pretestībai jābūt **mazākai par vismazāko** no paralēli slēgtajām pretestībām.

Bieži sastopami divi gadījumi.

1. **Paralēli savienoti tikai divi zari.** Tad katrā šādā situācijā nav jānodarbojas ar formulas (2.9) pārveidošanu. Izdarīsim to vienreiz, lai turpmāk lietotu šādu izteiksmi:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.9a)$$

Ievērojiet: 1) formula derīga tikai posmam ar diviem paralēliem zariem; līdzīgi uzrakstīta izteiksme posmam ar trīs paralēlām pretestībām nebūs pareiza; 2) reizinājums ir izteiksmes skaitītājā, nevis saucējā.

2. **Posms ar īsslēgumu:** vienā no paralēlajiem zariem pretestība ir vienāda ar nulli, bet pārējie zari satur tikai rezistīvus elementus  $R$ . Pirmkārt, šāda posma ekvivalentā pretestība ir vienāda ar nulli (jo tā nevar pārsniegt pat vismazāko no pretestībām). Otrkārt, spriegums uz īsslēgtā posma ir vienāds ar nulli (jo abi posma mezgli savienoti ar zaru bez pretestības). Tātad strāva zaros, kuros ir pretestība, ir vienāda ar nulli ( $I = U/R = 0$ ), tāpēc strāva tikai zarā bez pretestības ( $R = 0$ ) var nebūt vienāda ar nulli. Tā būs vienāda ar strāvu nezarotajā ķēdes posmā. Šo situāciju ilustrē 2.2. piemērs (shēma ar induktīvu elementu  $L$ ).

## Divas vienkāršākās shēmas

### Virtnes slēgums

Līdzstrāvas avotam ar spriegumu  $U$  pievienots prettestību virtnes slēgums (piemēram, 2.3.a att.). Strāvu  $I$  aprēķina, spriegumu  $U$  dalot ar ekvivalento prettestību saskaņā ar (2.8). Spriegumu uz atsevišķiem elementiem atrod, izmantojot rezistīva elementa vienādojumu (2.2).

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2 + \dots}, \quad U_1 = R_1 I, \quad U_2 = R_2 I, \dots$$

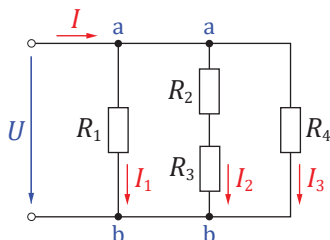
### Shēma ar paralēliem zariem

Ne tik acīmredzams, ka nav tālāk jāpārveido shēma, kas sastāv tikai no avotam pievienotiem paralēliem zariem (2.5. att.). Katrs no zariem pievienots mezgla punktam (a un b), tātad spriegumam  $U$ . Strāvu katrā zarā var atrast, izdalot spriegumu  $U$  ar zara prettestību, tāpēc ekvivalentā prettestība nav jāmeklē. Avota strāvu atrod, atbilstoši (2.6) summējot visu zaru strāvas.

Piemēram, 2.5. attēla shēmu aprēķina šādi:

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2 + R_3}, \quad I_3 = \frac{U}{R_4},$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$



2.5. att. Shēma ar paralēliem zariem.

Katrs pārejas process (tie aplūkoti 6. nodaļā) sākas un beidzas ar līdzstrāvas režīmu. To analīzei jūsu arsenālā jābūt vismaz prasmēm aprēķināt, pirmkārt, divus augšminētos shēmu tipus, otrkārt, shēmas ar vienu avotu, lietojot ekvivalentos pārveidojumus, un, treškārt, vienkāršākās shēmas, kurās ir induktīvs vai kapacitīvs elements.

## Ekvivalentu pārveidojumu metode

Līdzstrāvas ķēdes ar vienu avotu aprēķina, izmantojot galvenokārt ekvivalentus pārveidojumus. Shēmu pakāpeniski vienkāršo, līdz iegūst vienu no abiem aplūkotajiem shēmu tiptiem – virtnes slēgumu vai shēmu ar paralēliem zariem. Tajā atrod visas strāvu un spriegumu vērtības. Pēc tam rezultātus pakāpeniski pārnes atpakaļ uz sākotnējo shēmu, ievērojot, ka visi pārveidojumi ir ekvivalenti – katrām divām secīgām shēmām ir kopēja nepārveidota daļa.

## 2.1. piemērs

Aplūkosim vienkāršāko gadījumu, kad jālieto ekvivalentie pārveidojumi.

Dotie lielumi 2.6.a attēla shēmai:  $U = 200 \text{ V}$ ,  $R_1 = 20 \ \Omega$ ,  $R_2 = 400 \ \Omega$ ,  $R_3 = 100 \ \Omega$ . Aprēķināt visu strāvu vērtības.

### Atrisinājums

Pārveidojam shēmu, aizstājot elementu  $R_2$  un  $R_3$  paralēlslēgumu ar ekvivalento pretestību  $R_{23}$ :

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{400 \cdot 100}{400 + 100} = 80 \ \Omega.$$

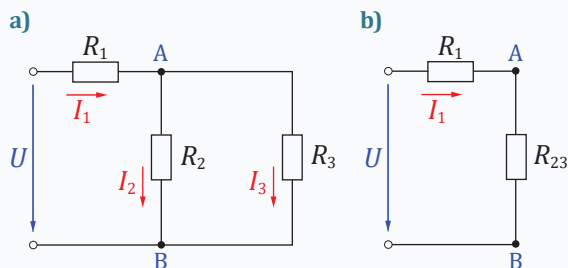
Izveidojas shēma ar virknes slēgumu (2.6.b att.), kas tālāk nav jāpārveido.

Aprēķinām lielumus, ko pārnesīsim atpakaļ uz pirmo shēmu:

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_{23}} = \frac{200}{20 + 80} = 2 \text{ A}, \quad U_{AB} = R_{23} I_1 = 80 \cdot 2 = 160 \text{ V}.$$

Tagad arī pirmajā shēmā spriegums  $U_{AB}$  ir zināms – tas atļauj aprēķināt strāvas posmā AB:

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{R_2} = \frac{160}{400} = 0,4 \text{ A}, \quad I_3 = \frac{U_{AB}}{R_3} = \frac{160}{100} = 1,6 \text{ A}.$$



2.6. att. Jaukts slēgums (a), ekvivalents shēmas pārveidojums (b).

Tā, lūk, aprēķina pašu vienkāršāko shēmu. Nemēģiniet to darīt “vēl vienkāršāk”. Piemēram, strāvu  $I_1$  pat eksāmenos “aprēķina”, izdalot spriegumu  $U$  ar  $R_1$  vai ar  $(R_1 + R_2)$ . No šādām idejām (teiksim,  $I_2 = U/R_2?$ ) uzmanieties! Izpētiet, kāpēc tās ir visrupjākās kļūdas!

Vienmēr pārbaudiet iegūtos rezultātus! Pārbaude vienmēr ir vienkāršāka par aprēķinu. Teiksim, ievietojam aprēķināto strāvas  $I_2$  vērtību vienādojumā (2.2), atrodam  $U_{AB}$ . Zinot to, pēc (2.2) atrodam  $I_3$ . Tad, izmantojot (2.6), atrodam  $I_1$ . Zinot to, pēc (2.2) atrodam  $U_{R1}$ . Un visbeidzot, ar (2.5) pārbaudām, vai abi spriegumi summā dod avota spriegumu  $U$ . Galvenais – jābūt pārliecībai, ka vienmēr nepieciešami vienādojumi (2.2), (2.5) un (2.6).

## Ķēdes ar induktīviem un kapacitīviem elementiem

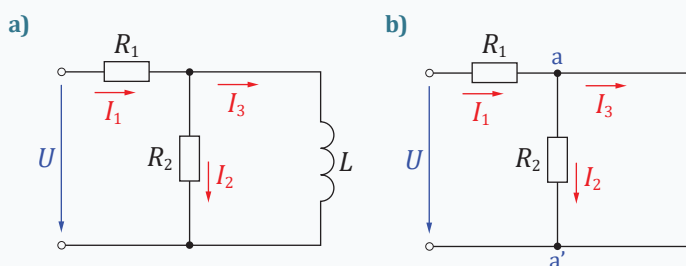
6. nodaļa veltīta **pārejas procesiem** ķēdēs ar līdzsprieguma avotu. Galvenā loma tajos ir induktivitātes spolēm un kondensatoriem (shēmās tiem atbilst elementi  $L$  un  $C$ ). Katrs pārejas process sākas un beidzas ar **stacionāru** līdzstrāvas režīmu, kam pievēršamies šajā nodaļā. Tāpēc jau turpmākajos piemēros parādīts, kā aprēķina stacionārus režīmus līdzstrāvas ķēdēs ar induktīvu vai kapacitīvu elementu. Iespējams, ka, studējot 6. nodaļas materiālu, nāksies šeit atgriezties.

### 2.2. piemērs

2.7.a att. parādīta līdzstrāvas ķēde ar induktīvu elementu  $L$ . Avota spriegums  $U = 60$  V. Tam pieslēgta shēma, kuras parametri:  $R_1 = R_2 = 20 \Omega$ ,  $L = 0,5$  H. Aprēķināt strāvas.

#### Atrisinājums

Saskaņā ar (2.3), induktīvo elementu aizstājot ar savienotājvadu, iegūstam 2.7.b attēla shēmu.



2.7. att. Līdzstrāvas ķēde ar induktīvu elementu (a), induktīva elementa aizstāšana ar īsslēgtu posmu (b).

Shēmā ir posms  $aa'$  ar īsslēgumu. Tā kā spriegums uz šī posma  $U_{aa'} = 0$  V, tad saskaņā ar (2.5) viss spriegums  $U$  pielikts rezistoram  $R_1$ . Zinot spriegumus uz rezistoriem, pēc (2.2) atrod strāvu vērtības:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{60}{20} = 3 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{U_{aa'}}{R_2} = \frac{0}{20} = 0 \text{ A}.$$

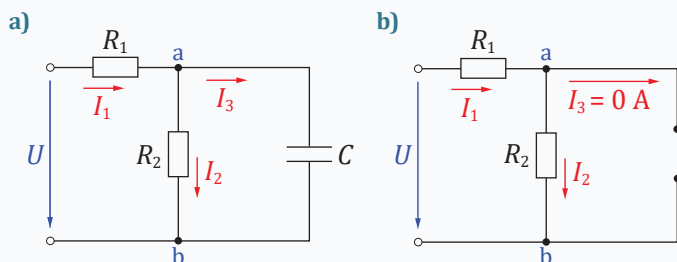
Strāvu  $I_3$  induktīvajā elementā  $L$  atrodam saskaņā ar (2.6):

$$I_3 = I_1 - I_2 = 3 - 0 = 3 \text{ A}.$$

### 2.3. piemērs

2.8.a attēlā parādītā shēma ir pieslēgta spriegumam  $U = 60$  V. Dots:  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $C = 0,5 \mu\text{F}$ . Aprēķināt visas strāvas un spriegumu uz kapacitīvā elementa.





2.8. att. Līdzstrāvas ķēde ar kapacitīvu elementu (a), kondensators aizstāts ar pārtraukumu (b).

### Atrisinājums

Saskaņā ar vienādojumu (2.4) kapacitīvu elementu var aizstāt ar pārtraukumu shēmā (t. i., ar bezgalīgi lielu pretestību) – 2.8.b attēls. Tā kā zarā ar pārtraukumu strāva ir vienāda ar nulli ( $I_3 = 0$ ), tad  $I_1 = I_2$  (strāvu vienādojums (2.6) mezglam a). Spriegums  $U$  ir vienāds ar abu rezistoru spriegumu summu; atrodam strāvas un spriegumu uz kondensatora:

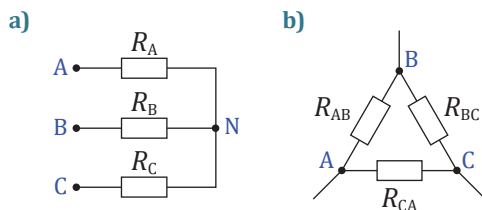
$$U = R_1 I_1 + R_2 I_2 = (R_1 + R_2) I_1, \quad I_1 = I_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{60}{10 + 20} = 2 \text{ A},$$

$$U_{ab} = R_2 I_2 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ V}.$$

### Trīsstūra vai zvaigznes slēguma pārveidošana

Shēmās elementi var būt savienoti arī citādi, neveidojot ne virknes, ne paralēlslēgumu. Vienkāršākais piemērs ir tā saucamā tilta shēma (2.10.a att.). Šādu shēmu aprēķina, ekvivalenti pārveidojot trīsstūra vai zvaigznes slēgumu. Iepazīsimies ar minētajiem slēguma tiem (ar tiem sastapsimies arī visā 5. nodaļā “Trīsfāžu maiņstrāvas ķēdes”) un to ekvivalentu pārveidošanu.

Trīs elementi var būt savienoti zvaigznē (2.9.a att.) vai trīsstūrī (2.9.b att.).



2.9. att. Zvaigznes slēgums (a) un trīsstūra (b) slēgums.

Zvaigznes slēgumā trīs elementiem ir kopējs punkts N. Zvaigzni pārējai shēmas daļai pievieno trīs punktus: A, B un C.

Trīsstūra slēgumā elementi savienoti cikliski. Arī trīsstūri pārējai shēmai pievieno trīs punktus.

Eksistē formulas ekvivalentiem pārveidojumiem trīsstūris–zvaigzne un zvaigzne–trīsstūris. Piemēram, pārveidojums trīsstūris–zvaigzne ir ekvivalents, ja izpildīti nosacījumi:

$$R_A = \frac{R_{AB}R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}, \quad R_B = \frac{R_{BC}R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}, \quad R_C = \frac{R_{CA}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}.$$

## 2.4. piemērs

Aprēķināt visas strāvas 2.10.a attēla shēmā. Doti parametri:  $U = 130 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_3 = R_0 = 30 \text{ } \Omega$ ,  $R_2 = 10 \text{ } \Omega$ ,  $R_4 = 70 \text{ } \Omega$ .

### Atrisinājums

Atcerēsimies ekvivalento pārveidojumu metodes principus: 1) shēmu pakāpeniski vienkāršo, to ekvivalenti pārveidojot; 2) aprēķina vienkāršāko shēmu; 3) rezultātus pakāpeniski pārnes atpakaļ līdz sākotnējai shēmai. Tam visam izsekosim šajā piemērā.

1. Apzīmējam shēmā visus punktus un strāvas. Shēmā ar vienu avotu iespējams novērtēt strāvu **faktiskos** virzienus – tos nosaka avota sprieguma virziens. Šeit nav skaidrs vienīgi strāvas  $I_0$  virziens. To izvēlamies brīvi.
2. Sākotnējā (pirmajā) shēmā (2.10.a att.) nav ne virknes, ne paralēlslēguma. Atrodam shēmā trīsstūra slēgumu, ko veido rezistori  $R_1$ ,  $R_0$  un  $R_3$ , ko ekvivalenti pārveidosim zvaigznē ar rezistoriem  $R_a$ ,  $R_b$  un  $R_c$ , iegūstot otro shēmu (2.10.b att.). Rezistoriem ir jauns kopējs punkts e, bet to brīvie izvadi pievienoti shēmas punktiem a, b un c.

Ievērojiet, ka pārējā pirmās shēmas daļa, ieskaitot arī punktus a, b un c, paliek nepārveidota. Tas nozīmē, ka strāvas tajā ( $I$ ,  $I_2$  un  $I_4$ ), kā arī punktu a, b, c un d potenciāli (vai visi spriegumi starp šiem punktiem) paliek bez izmaiņām. Abas shēmas būs ekvivalentas, ja otrajā shēmā zvaigznes slēguma pretestību vērtības būs šādas:

$$R_a = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_0} = \frac{30 \cdot 30}{30 + 30 + 30} = 10 \text{ } \Omega, \quad R_b = R_c = 10 \text{ } \Omega.$$

3. Tagad visi 2.10.b attēla shēmas parametri zināmi. Šo shēmu jau var vienkāršot: pretestības  $R_b$  un  $R_2$  ir slēgtas virknē, tāpat arī  $R_c$  un  $R_4$ . Aizstājam šos virknes slēgumus ar ekvivalentām pretestībām  $R_{b2}$  un  $R_{c4}$ :

$$R_{b2} = R_b + R_2 = 10 + 10 = 20 \text{ } \Omega, \quad R_{c4} = R_c + R_4 = 10 + 70 = 80 \text{ } \Omega.$$

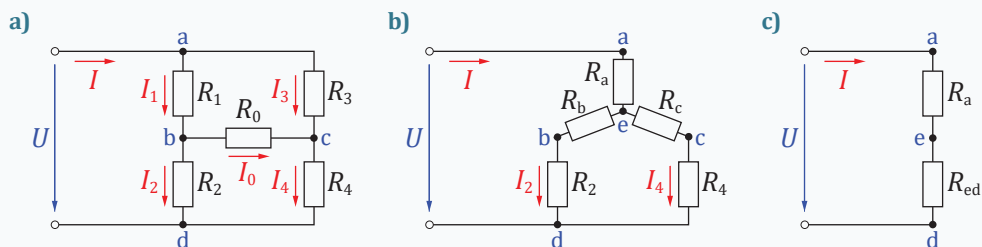
Iegūtās pretestības ir slēgtas paralēli. Aizstājam tās ar posma ed ekvivalento pretestību:

$$R_{ed} = \frac{R_{b2} R_{c4}}{R_{b2} + R_{c4}} = \frac{20 \cdot 80}{20 + 80} = 16 \text{ } \Omega.$$

4. Beidzot iegūta 2.10.c attēla shēma – virknes slēgums, kas nav jāvienkāršo. Aprēķinām to:

$$I = \frac{U}{R_a + R_{ed}} = \frac{130}{10 + 16} = 5 \text{ A}, \quad U_{ae} = R_a I = 10 \cdot 5 = 50 \text{ V},$$

$$U_{ed} = R_{ed} I = 16 \cdot 5 = 80 \text{ V}.$$



2.10. att. Tilta shēma (a), shēma pēc trīsstūra pārveidošanas zvaigznē (b), shēma pēc pēdējā pārveidojuma (c).

5. Tagad izsekosim, kā rezultātus pakāpeniski pārnes atpakaļ uz pirmo shēmu (2.10.a att.). Ievērosim, ka strāva  $I$  atrodas visu trīs shēmu nepārveidotajā daļā, tāpēc to var pārnest atpakaļ līdz pat pirmajai shēmai. Tā kā abās pēdējās shēmās spriegums  $U_{ed}$  ir viens un tas pats, var aprēķināt strāvas 2.10.b attēla shēmas paralēlajos zaros:

$$I_2 = \frac{U_{ed}}{R_b + R_2} = \frac{80}{10 + 10} = 4 \text{ A}, \quad I_4 = \frac{U_{ed}}{R_c + R_4} = \frac{80}{10 + 70} = 1 \text{ A}.$$

Strāvas  $I_2$  un  $I_4$  atrodas pirmās un otrās shēmas kopējā daļā, tāpēc arī tās var pārnest uz pirmo shēmu (2.10.a att.).

6. Tagad atbilstoši (2.2) var atrast šo strāvu radītos spriegumus uz pretestībām:

$$U_{bd} = R_2 I_2 = 10 \cdot 4 = 40 \text{ V}, \quad U_{cd} = R_4 I_4 = 70 \cdot 1 = 70 \text{ V};$$

un pēc tam, izmantojot (2.5), arī visus pārējos spriegumus pirmajā shēmā:

$$U_{ab} = U - U_{bd} = 130 - 40 = 90 \text{ V}, \quad U_{ac} = U - U_{cd} = 130 - 70 = 60 \text{ V}, \\ U_{bc} = U_{bd} + U_{dc} = U_{bd} - U_{cd} = 40 - 70 = -30 \text{ V}.$$

Spriegumi uz visām pretestībām zināmi, un pārējās strāvas var atrast, izmantojot (2.2):

$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R_1} = \frac{90}{30} = 3 \text{ A}, \quad I_3 = \frac{U_{ac}}{R_3} = \frac{60}{30} = 2 \text{ A}, \quad I_0 = \frac{U_{bc}}{R_0} = \frac{-30}{30} = -1 \text{ A}.$$

Rezultātus pārbaudām, izmantojot strāvu vienādojumu (2.6) mezgliem a, b un c:

$$0 = -I + I_1 + I_3 = -5 + 3 + 2 = 0, \quad 0 = I_1 - I_2 - I_0 = 3 - 4 - (-1) = 0, \\ 0 = I_3 + I_0 - I_4 = 2 + (-1) - 1 = 0.$$

## Līdzstrāvas ķēdes ar vairākiem avotiem: aprēķina metodes

Šeit aplūkosim dažas no metodēm, ko lieto, risinot elektrisko ķēžu analīzes pamatuzdevumu: doti visu avotu spriegumi vai EDS, visu pārējo elementu parametri; jāaprēķina strāvas visos shēmas zaros, kā arī atsevišķu ķēdes daļu spriegumi un jaudas.

Jebkuru ķēdi var aprēķināt ar **Kirhofa vienādojumu metodi**: vienādojumus sastāda, izmantojot abus Kirhofa likumus. Iegūst vienādojumu sistēmu, kurā vienādojumu skaits ir vienāds ar nezināmo strāvu skaitu (vai, citiem vārdiem, ar ķēdes zaru skaitu). Jebkuras shēmas aprēķinam var lietot arī **kontūrstrāvu metodi**, kas ir Kirhofa vienādojumu metodes modifikācija. Shēmām ar diviem mezgliem (neatkarīgi no nezināmo strāvu skaita) vispār var iztikt bez vienādojumu sistēmas risināšanas, ja **izvēlas mezglu spriegumu metodi**. Protams, lietojot kontūrstrāvu vai mezglu spriegumu metodi, kopējais izmantojamo vienādojumu skaits nesamazināsies, taču daļa no tiem vairs nebūs vienādojumu **sistēmas** sastāvā.

Vēl jāatzīmē metode, kurā izmanto **superpozīcijas principu** – vienkārša, bet samērā darbietilpīga metode. Tajā vienas shēmas vietā aprēķina vairākas – katrā shēmā atstāj vienu avotu (jebkuru no pārējiem avotiem aizstāj ar vadu) un spriegumus un strāvas atrod, algebriski summējot atsevišķās shēmās iegūtos rezultātus.

Visbeidzot, situācijā, kad jāpēta shēmas režīmi, mainoties vienai no shēmas pretestībām, ir iespējams iztikt bez **sarežģītas shēmas** vairākkārtēja aprēķina. Tam kalpo **ekvivalentā ģenerators metode**: ikvienu shēmu var reducēt līdz aktīvam divpolam, kam pievienota maināma slodzes pretestība (2.13. att.).

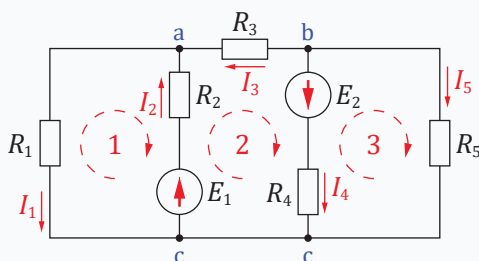
Minēto aprēķina metožu lietošanas principi izmantojami, arī aprēķinot maiņstrāvas ķēdes ar simbolisko (komplekso skaitļu) metodi, kas aplūkota 4. nodaļā.

## Kirhofa vienādojumu metode

Nezināmās strāvas atrod, risinot vienādojumu sistēmu, ko sastāda, izmantojot abus Kirhofa likumus.

- Shēmā apzīmē visas nezināmās strāvas, brīvi izvēloties to pozitīvos virzienus.
- Katram no shēmas mezgliem, izņemot vienu no tiem, sastāda Kirhofa strāvu vienādojumu (2.6).
- Katram neatkarīgam kontūram, iepriekš izvēloties kontūra apejas virzienu, sastāda Kirhofa spriegumu vienādojumu (2.5a). Neatkarīgs kontūrs ir tāds, kura sastāvā ir vismaz viens iepriekšējos vienādojumos neizmantots zars.
- Atrisinot vienādojumu sistēmu, atrod visas nezināmās strāvas.

### 2.5. piemērs



2.11. att. Shēma 2.5. piemēram.

Dots: avotu EDS:  $E_1 = 90 \text{ V}$ ,  $E_2 = 90 \text{ V}$ ; pretestību vērtības:  $R_1 = 40 \ \Omega$ ,  $R_2 = 10 \ \Omega$ ,  $R_3 = 29,3 \ \Omega$ ,  $R_4 = 10 \ \Omega$ ,  $R_5 = 20 \ \Omega$ . Aprēķināt visu strāvu vērtības.

### Atrisinājums

1. Shēmā ir pieci zari. Apzīmējam visu zaru strāvas, brīvi izvēloties to pozitīvos virzienus.
2. Shēmā ir trīs mezgli, apzīmējam tos (a, b, c). Diviem no tiem (a un b) sastādām strāvu vienādojumus pēc Kirhofa pirmā likuma (2.6):

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad -I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

3. Izvēlamies trīs neatkarīgus kontūrus 1, 2 un 3. Brīvi pieņemam to apejas virzienus. 2.11. attēlā parādīts, ka visus kontūrus apiet pulksteņa rādītāja kustības virzienā. Šiem kontūriem sastādām vienādojumus pēc Kirhofa otrā likuma (2.5a):

$$-E_1 = -R_1 I_1 - R_2 I_2, \quad E_1 + E_2 = R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_4 I_4, \quad -E_2 = -R_4 I_4 + R_5 I_5.$$

4. Atrisinot piecu vienādojumu sistēmu, atrodam visas strāvas:

$$I_1 = 1,2 \text{ A}, \quad I_2 = 4,2 \text{ A}, \quad I_3 = -3 \text{ A}, \quad I_4 = 5 \text{ A}, \quad I_5 = -2 \text{ A}.$$

### Mezglu spriegumu metode

Mezglu spriegumu metode ir sevišķi piemērota, aprēķinot shēmu, kurā ir **tikai divi mezgli**. Šādas shēmas (piemērs redzams 2.12. att.) var atšķirties ar zaru skaitu un to sastāvu.

Ja Kirhofa vienādojumu metode piedāvā sastādīt un risināt vairāku vienādojumu sistēmu, tad šeit vienādojumu sistēmas vietā iespējams risināt katram zaram sastādītu vienādojumu. Vispirms uzzina spriegumu starp abiem mezgliem, un tad katra zara vienādojumā ir tikai viens nezināmais – attiecīgā zara strāva.

### Risinājuma plāns ar mezglu spriegumu metodi

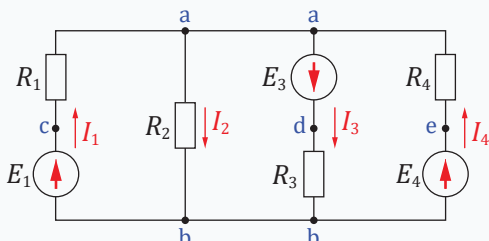
- Apzīmē shēmā abus mezglus. Brīvi izvēlas zaru strāvu virzienus un atzīmē tos shēmā.
- Atrod **mezglu spriegumu** (mezglu apzīmējumi šeit: a un b), izmantojot mezglu spriegumu formulu:

$$U_{ab} = \frac{\pm E_1 g_1 \pm E_2 g_2 \pm \dots}{g_1 + g_2 + \dots}, \quad (2.10)$$

kur  $E$  – zara EDS (ar plusa zīmi, ja EDS vērsts uz mezglu a),  $g$  – zara vadītspēja, kas ir zara pretestību summai apgriezts lielums ( $1/R$ ). **Uzmanību!** Ja shēmā ir zars, kurā  $R = 0$ , tad formulu nevarētu lietot ( $g = 1/R = 1/0?$ ), taču tā ir lieka, jo mezglu spriegumu tad uzreiz dod elementa  $E$  vienādojums (2.1).

- **Katram zaram** uzraksta spriegumu vienādojumu, izmantojot (2.5). Spriegumus tajā aizstāj ar EDS (2.1) vai ar strāvas un pretestības reizinājumu (2.2). Katrā šādā vienādojumā ir viens nezināmais – zara strāva.
- Atrisinot atsevišķi katru no šiem vienādojumiem, atrod visas zaru strāvas.

## 2.6. piemērs



2.12. att. Shēma 2.6. piemēram.

Dots: avotu EDS:  $E_1 = 100 \text{ V}$ ,  $E_3 = 15 \text{ V}$ ,  $E_4 = 35 \text{ V}$ ; pretestības:  $R_1 = 2,5 \Omega$ ,  $R_2 = 25 \Omega$ ,  $R_3 = 30 \Omega$ ,  $R_4 = 10 \Omega$ . Jāaprēķina visu strāvu vērtības.

### Atrisinājums

1. Apzīmējam shēmā visu zaru strāvu virzienus. Tos izvēlas patvaļīgi, lai pavinātos vienādojumu sastādīšanā.
2. Shēmā ir divi mezgli (a un b). Atbilstoši (2.10) atrodam mezglu spriegumu  $U_{ab}$ :

$$U_{ab} = \frac{E_1/R_1 - E_3/R_3 + E_4/R_4}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4} = \frac{100/2,5 - 15/30 + 35/10}{1/2,5 + 1/25 + 1/30 + 1/10} = \frac{43}{0,573} = 75 \text{ V}.$$

EDS  $E_3$  šajā izteiksmē ir ar mīnusa zīmi, jo tā bultiņas virziens vērsts prom no mezgla a. Ievērojiet, ka saucējā ir visu zaru (arī to zaru, kuros EDS nav) vadītspēju **aritmētiskā** summa.

3. Sastādām spriegumu vienādojumu (2.5) katram zaram, mezglu spriegumu  $U_{ab}$  izsakot ar spriegumiem uz visiem attiecīgā zara elementiem. Spriegumus izteiksmes labajā pusē aizstājam ar  $E$  vai  $RI$ , izmantojot vienādojumu (2.1) vai (2.2).

$$U_{ab} = U_{ac} + U_{cb} = -R_1 I_1 + E_1, \quad U_{ab} = R_2 I_2,$$

$$U_{ab} = U_{ad} + U_{db} = -E_3 + R_3 I_3, \quad U_{ab} = U_{ae} + U_{eb} = -R_4 I_4 + E_4.$$

Atcerēsimies, ka “tabulas formulās” (2.1) vai (2.2) dotās zīmes atbilst situācijai, kad abu elektrisko lielumu pieņemtie pozitīvie virzieni ( $U$  un  $E$  vai  $U$  un  $I$ ) sakrīt. Piemēram, pirmajā zarā spriegums  $U_{cb}$  ir vērsts uz leju. Aizstājot to ar  $E_1$ , kura bultiņa vērsta uz augšu, zīme būs pretēja nekā vienādojumā (2.1), t. i., pozitīva. Aizstājot spriegumu  $U_{ac}$  (vērsts uz leju) ar  $R_1 I_1$  (strāvas bultiņa vērsta uz augšu), arī mainīta zīme, salīdzinot ar elementa  $R$  vienādojumu (2.2).

4. No vienādojumiem izsakām un aprēķinām zaru strāvas:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1} = \frac{100 - 75}{2,5} = 10 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2} = \frac{75}{25} = 3 \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{E_3 + U_{ab}}{R_3} = \frac{15 + 75}{30} = 3 \text{ A}, \quad I_4 = \frac{E_4 - U_{ab}}{R_4} = \frac{35 - 75}{10} = -4 \text{ A},$$

Strāvai  $I_4$  mīnusa zīme nozīmē, ka tās patiesais virziens ir pretējs shēmā parādītajam.

Iegūto rezultātu pārbaudei izmantojam Kirhofa pirmo likumu (2.6). Uzrakstām tā izteiksmi mezglam a un pārlicināmies par aprēķina rezultātu pareizību:

$$0 = I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 10 - 3 - 3 + (-4) = 0.$$

### Mezglu sprieguma formulas (2.10) izvedums

Pieņemsim, ka visu zaru strāvu  $I_i$  pozitīvie virzieni vērsti uz mezglu a. Spriegumu vienādojums pēc (2.5) jebkuram zaram, aizstājot spriegumu  $U_{ab}$  ar elementu  $E$  un  $R$  vienādojumiem:

$$U_{ab} = \pm E_i - R_i I_i.$$

Vienādojumā saskaņā ar (2.2) strāva  $I_i$  ir ar mīnusa zīmi, jo tā vērsta (kā vienojāmies, uz mezglu a) pretēji sprieguma  $U_{ab}$  virzienam (no mezgla a uz mezglu b). Savukārt saskaņā ar (2.1) sprieguma  $U_{ab}$  virzienā vērsts EDS  $E_i$  vienādojumā jāraksta ar mīnusa zīmi, bet **EDS, kura bultiņa vērsta uz mezglu a – ar plusa zīmi.**

Izsakot jebkura zara strāvu no spriegumu vienādojumiem, iegūst:

$$I_i = \frac{\pm E_i}{R_i} - \frac{U_{ab}}{R_i} = \pm E_i g_i - U_{ab} g_i.$$

Ar  $g$  apzīmēta katra zara **vadītspēja** – pretestībai apgriezts lielums.

Saskaņā ar strāvu vienādojumu (2.6) mezglam a visu zaru strāvu summa vienāda ar nulli, tāpēc:

$$U_{ab}(g_1 + g_2 + \dots) = \pm E_1 g_1 \pm E_2 g_2 \pm \dots$$

Izsakot no šī vienādojuma mezglu spriegumu  $U_{ab}$ , iegūstam mezglu sprieguma izteiksmi (2.10):

$$U_{ab} = \frac{\pm E_1 g_1 \pm E_2 g_2 \pm \dots}{g_1 + g_2 + \dots}.$$

### Jaudu bilances sastādīšana

Jaudu bilances sastādīšana ir darbietilpīgāks pārbaudes veids, taču tas ļauj novērtēt enerģētiskos procesus shēmā. Sastādīt jaudu bilanci nozīmē noteikt, kuri no EDS darbojas kā avoti, un aprēķināt to kopējo ģenerēto jaudu. Šai jaudai jābūt vienāda ar visu patērētāju (tie ir pārējie EDS un visi rezistīvie elementi) kopējo patērēto jaudu.

### 2.7. piemērs

Sastādīsim jaudu bilanci iepriekšējā piemērā aprēķinātajai shēmai.

#### Atrisinājums

Visi rezistīvie elementi ir patērētāji, bet katra EDS režīms vēl jānosaka.  $E_1$  un  $E_3$  ir avoti, jo  $E_1$  un  $I_1$  pieņemtie pozitīvie virzieni (bultiņu virzieni shēmā) sakrīt, tāpat arī

$E_3$  un  $I_3$  bultiņu virzieni. Šie pieņemtie pozitīvie virzieni ir arī **faktiskie**, jo strāvu  $I_1$  un  $I_3$  aprēķinātās vērtības ir pozitīvas. Spriežot pēc  $E_4$  un  $I_4$  bultiņu vienādā virziena shēmā, arī  $E_4$  **nosacīti** darbojas avota režīmā. Tomēr tas, ka strāvas  $I_4$  vērtība ir negatīva, nozīmē, ka tās **faktiskais** virziens ir pretējs pieņemtajam, tātad nesakrīt ar  $E_4$  virzienu, un EDS  $E_4$  faktiski ir patērētājs.

EDS un strāvu zīmes jau izmantojām, nosakot elementu  $E_1$ ,  $E_3$  un  $E_4$  darba režīmu, tāpēc jaudu bilancē ievērosim tikai reizinājumu  $EI$  absolūto vērtību. Avotu (ģenerētā) jauda:

$$P_{\text{avotu}} = |E_1 I_1| + |E_3 I_3| = 100 \cdot 10 + 15 \cdot 3 = 1045 \text{ W.}$$

Patērētāji ir visi rezistīvie elementi un EDS  $E_4$ . Kopējā patērētā jauda:

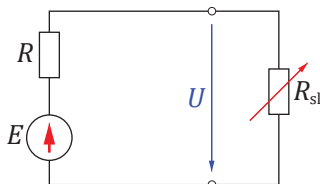
$$P_{\text{patēr}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + |E_4 I_4| = 2,5 \cdot 10^2 + 25 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3^2 + 10 \cdot 4^2 + 35 \cdot 4 = 1045 \text{ W.}$$

Patērētā jauda ir vienāda ar avotu ģenerēto jaudu, tātad aprēķins ir veikts pareizi.

## Ekvivalentā ģeneratora metode

Aplūkosim tipisku situāciju. Ir sarežģīta shēma ar vairākiem avotiem un pretestībām. Viena no tām ir **maināma slodzes pretestība (mainrezistors)**. Jāaprēķina vairāki shēmas režīmi – ar dažādām slodzes pretestības vērtībām. Lai izvairītos no atkārtotas sarežģītas shēmas aprēķināšanas, lieto ekvivalentā ģeneratora metodi.

Nemainīgo shēmas daļu, lai cik sarežģīta tā arī nebūtu, var ekvivalenti aizstāt ar **ekvivalentu ģeneratoru** (2.13. att.). Tas ir **vienkāršākais** aktīvais divpols: EDS  $E$  virknē ar pretestību  $R$ . Metode dod algoritmu ekvivalentā ģeneratora parametru noteikšanai:



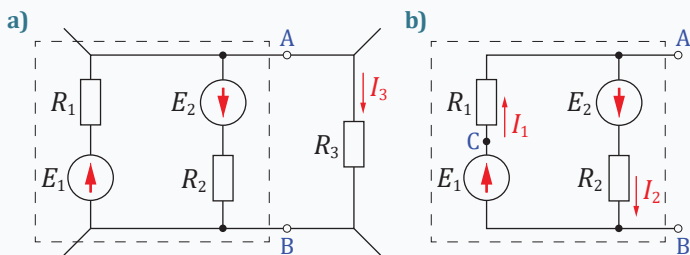
2.13. att. Aktīvs divpols ar slodzi.

- EDS  $E$  ir vienāds ar spriegumu uz slodzes pretestības tukšgaitā. Slodzes pretestību sākotnējā shēmā aizstāj ar pārtraukumu un aprēķina spriegumu uz šī pārtraukuma, kas arī ir meklējamais EDS;
- pretestību  $R$  nosaka šādi: sākotnējā shēmā slodzes pretestību aizstāj ar pārtraukumu, katru EDS aizstāj ar vadu un aprēķina ekvivalento pretestību starp slodzes pretestības izvadiem.

## 2.8. piemērs

Dotās shēmas (2.14.a att.) parametru vērtības:  $E_1 = 40 \text{ V}$ ,  $E_2 = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 40 \Omega$ . Aprēķināt spriegumu uz slodzes rezistora  $R_3$  un strāvu tajā trīs režīmos: ja pretestības  $R_3$  vērtības ir  $10 \Omega$ ,  $20 \Omega$  un  $30 \Omega$ .





2.14. att. Aprēķināmā shēma (a), shēma EDS noteikšanai (b).

### Atrisinājums

Aktīvo divpolu (2.14. attēla shēmā ierobežots ar raustītu līniju) aizstājam ar ekvivalento ģeneratoru (2.13. att.) un nosakām tā parametrus  $E$  un  $R$ .

1. **Nosakām ekvivalento EDS  $E$ .** Izveidojam shēmā tukšgaitas režīmu (2.14.b att.). Pieņemam strāvu virzienus tā, lai  $I_1 = I_2$  (2.6). Uzrakstām vienādojumu kontūram pēc Kirchofa otrā likuma (2.5a), no kā atrodam strāvu  $I_1$ .

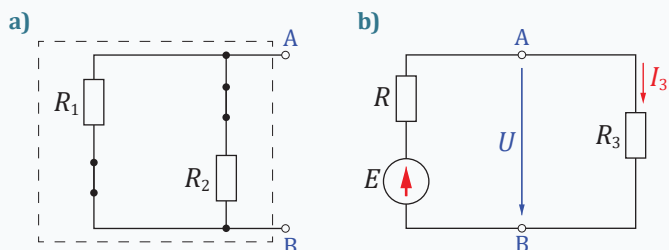
$$E_1 + E_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 = (R_1 + R_2) I_1, \quad I_1 = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2} = \frac{40 + 10}{10 + 40} = 1 \text{ A.}$$

Lai noteiktu ekvivalento EDS, 2.14.b attēla shēmai uzrakstām sprieguma  $U_{AB}$  vienādojumu pēc (2.5) un tajā izmantojam elementu vienādojumu (2.1) un (2.2):

$$E = U_{AB} = U_{AC} + U_{CB} = -R_1 I_1 + E_1 = -10 \cdot 1 + 40 = 30 \text{ V.}$$

2. **Ekvivalentās pretestības noteikšanai** izveidojam shēmu (2.15.a att.), kurā katrs EDS aizstāts ar vadu. Nosakām ekvivalento pretestību starp punktiem A un B:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 40}{10 + 40} = 8 \Omega.$$



2.15. att. Ekvivalentās pretestības  $R$  noteikšana (a), pārveidotā shēma ar ekvivalento ģeneratoru (b).

3. Tagad abi ekvivalentā ģenerators parametri zināmi:  $E = 30 \text{ V}$  un  $R = 8 \Omega$ . Ģenerators izejai – punktiem A un B (2.15.b att.) – pievienojam slodzes rezistoru  $R_3$ . Ar šo shēmu ērti aprēķināt slodzes strāvu  $I_3$  un spriegumu  $U_{AB}$  pie jebkuras  $R_3$  vērtības. Piemēram, ja divpols slogots ar pretestību  $R_3 = 10 \Omega$ :

$$I_3 = \frac{E}{R + R_3} = \frac{30}{8 + 10} = 1,67 \text{ A}, \quad U_{ab} = R_3 I_3 = 10 \cdot 1,67 = 16,7 \text{ V}.$$

Ievietojot šajās izteiksmēs citas  $R_3$  vērtības, aprēķinām jebkuru režīmu, piemēram:

$$\text{ja } R_3 = 20 \Omega: I = 1,07 \text{ A}, \quad U_{AB} = 21,4 \text{ V};$$

$$\text{ja } R_3 = 30 \Omega: I = 0,79 \text{ A}, \quad U_{AB} = 23,7 \text{ V}.$$

## Līdzstrāvas ķēžu un režīmu piemēri

### Sprieguma dalītājs

Virknē slēgti rezistīvi elementi, piemēram, rezistors  $R_1$  ar  $R_2$  2.16.a attēla shēmā, veido sprieguma dalītāju. Ja ķēdei pieslēgts spriegums, virknē savienotajos elementos ir viena un tā pati strāva  $I$ . No vienādojuma (2.5) kopā ar (2.2) izriet, ka spriegums  $U$  sadalās proporcionāli elementu pretestībām:

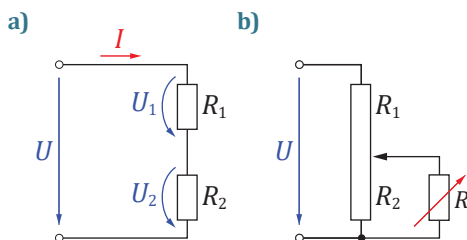
$$U = U_1 + U_2, \quad U_1 = R_1 I, \quad U_2 = R_2 I \quad \rightarrow \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Ja rezistora  $R_1$  pretestība ir maināma, tad uz rezistora  $R_2$  iespējams iegūt jebkuru sprieguma vērtību  $U_2$ , kas nepārsniedz avota spriegumu  $U$ . Taču šādu paņēmieni lieto tikai **nelielas jaudas ķēdēs**, jo jāaprēķinās ar jaudas zudumiem rezistorā  $R_1$ . Par to arī skatīt sadaļā "Aktīva divpola darba režīmi".

2.16.b attēlā parādīta populāra shēma mazas jaudas ķēdēm – reostats potenciometra slēgumā. Te izmanto reostata trīs punktus: atkarībā no slīdkontakta stāvokļa mainās attiecība  $R_1 / R_2$  – tātad arī spriegums uz potenciometra posma  $R_2$ . Slodzes pretestību  $R$  pieslēdz paralēli šim posmam. Taču tad jāaprēķinās ar to, ka sprieguma  $U$  sadalījums izmainās – tas vairs nav  $R_1 / R_2$ , bet kļūst atkarīgs no slodzes pretestības  $R$  vērtības:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1(R + R_2)}{RR_2}.$$

Pārlicinieties, ka spriegumu attiecība vienāda ar pretestības  $R_1$  attiecību pret posma  $R_2 \parallel R$  pretestību.



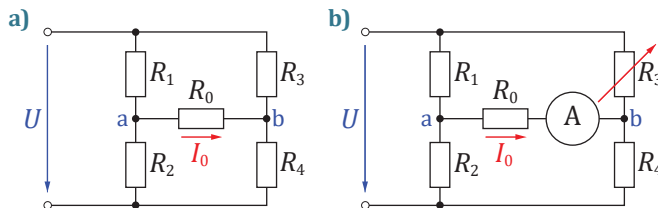
2.16. att. Sprieguma dalītājs (a), potenciometrs ar slodzes pretestību  $R$  (b).

## Līdzstrāvas tilta shēma

Līdzstrāvas tilts ir 2.17. attēlā parādītā shēma, kas izveidota no diviem sprieguma dalītājiem  $R_1/R_2$  un  $R_3/R_4$ , kuru viduspunktus savieno zars ar rezistoru  $R_0$ . Sprieguma dalītāji sadalīs spriegumu  $U$  vienādi, ja to pretestību attiecības būs vienādas:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Pastāvot šādam nosacījumam, punktu a un b potenciāli būs vienādi (t. i.,  $U_{ab} = 0$  V), tāpēc elementā  $R_0$  strāvas vērtība būs nulle. Šo režīmu sauc par tilta līdzsvaru un iepriekšējo izteiksmi – par tilta līdzsvara nosacījumu.



2.17. att. Līdzstrāvas tilta shēma (a), pretestības  $R_4$  mērīšana (b).

Tilta shēmu izmanto pretestību mērīšanai. Pieņemsim, ka jānosaka pretestības  $R_4$  vērtība, bet divu pretestību vērtības (piemēram,  $R_1$  un  $R_2$ ) ir zināmas. Pretestībai  $R_3$  jābūt maināmai, turklāt ar nolāsāmu vērtību (tādas ir laboratorijā lietojamās pretestību magazīnas). Strāvu zarā ab kontrolē, izmantojot jutīgu ampērmetru A. Regulējot maināmās pretestības  $R_3$  vērtību, panāk tilta līdzsvaru ( $I_0 = 0$  A). Nezināmo pretestību  $R_4$  tad var aprēķināt ar izteiksmi, kas izriet no tilta līdzsvara nosacījuma:  $R_4 = R_2 R_3 / R_1$ .

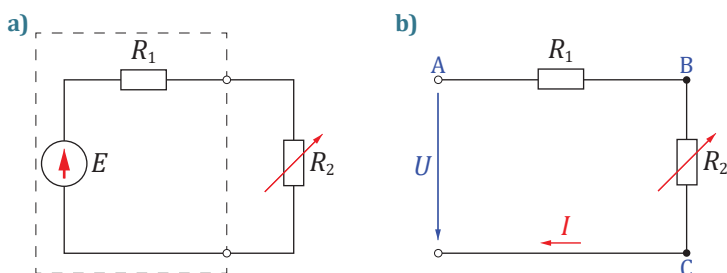
## Aktīva divpola darba režīmi

Aplūkosim gadījumu, kad līdzstrāvas ķēdē ir **patērētājs ar maināmu pretestību**. Šīs nodaļas sadaļā “Ekvivalentā ģenerators metode” parādīts, ka visu pārējo ķēdi – neatkarīgi no tās konfigurācijas un avotu skaita tajā – var ekvivalenti aizstāt ar vienkāršu **aktīvu divpolu**: EDS virknē ar rezistīvu elementu  $R$ .

2.18.a attēla shēmā ir aktīvs divpols ( $E$  un  $R_1$ ), kam pievienota slodzes pretestība  $R_2$ . Mainot tās vērtību no bezgalības līdz nullei, iegūst dažādus darba **režīmus**. 2.18.b attēlā parādīta shēma aktīva divpola režīmu eksperimentālai pētīšanai. Kā pieņemts shēmās ar vienu avotu, EDS aizvietots ar līdzvērtīgu pretēji vērstu spriegumu  $U = E$ .

### Galējie režīmi – tukšgaita un īsslēgums

Dažādus režīmus iegūst, patērētāja pretestību  $R_2$  mainot no bezgalības līdz nullei. Abiem galējiem režīmiem ir nosaukumi (2.19.a att.). Režīmu, kad ķēde ir pārtraukta ( $I = 0$  A), kas nozīmē arī bezgalīgi lielu  $R_2$  vērtību, sauc par **tukšgaitas režīmu**. Vislielāko iespējamo strāvas vērtību iegūst, ja slodzes pretestība  $R_2$  samazināta līdz nullei. Šo režīmu sauc par **īsslēguma režīmu**, un strāvu – par īsslēguma strāvu  $I_{is} = U/R_1$ .



2.18. att. Aktīvs divpols ( $E$  un  $R_1$ ) ar slodzi  $R_2$  (a), EDS aizstāts ar spriegumu  $U$  (b).

**Iodze** ir vispārtehnisks jēdziens. Piemēram, asinhronzinēju sloģo ar momentu  $M$ , bet līdzstrāvas ģeneratora slodze ir strāva  $I$ . Elektrotehnikā pieņemts, ka slodzes līmeni vērtē nevis pēc slodzes pretestības, bet gan pēc slodzes strāvas vērtības. Piemēram, tukšgaitā, kad pretestība ir bezgalīgi liela, bet slodze  $I = 0$  A, saka, ka divpols nav slogots. Samazinot slodzes pretestību, strāvas vērtība (t. i., slodzes vērtība) pieaug.

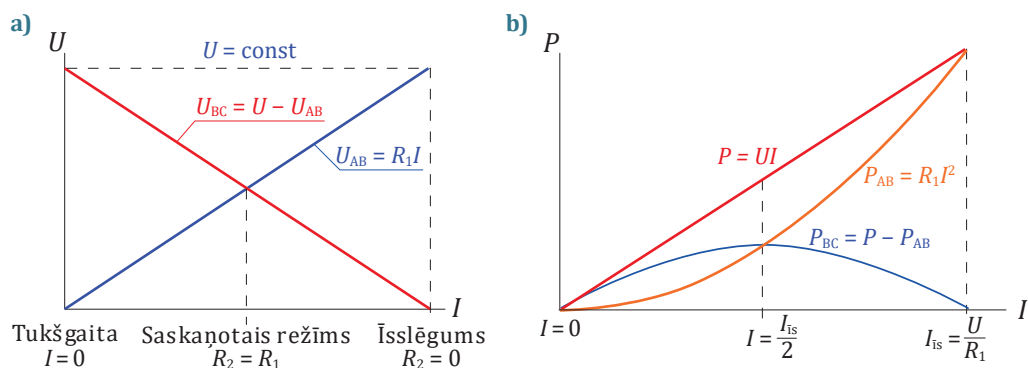
Izpētīsim, kas notiek visā režīmu diapazonā no tukšgaitas līdz īsslēgumam, lai atbildētu uz šādiem jautājumiem: 1) kā mainās patērētāja spriegums  $U_{BC}$ ? 2) kurā režīmā slodzes pretestībā izdalīsies vislielākā jauda? 3) kā mainās ķēdes lietderības koeficients? Visos grafikos 2.19. un 2.20. attēlā uz abscisu ass būs slodzes strāva  $I$  diapazonā no nulles līdz īsslēguma strāvas vērtībai.

### Spriegumu atkarība no slodzes

2.18.b attēla shēma ir sprieguma dalītājs ar vienu maināmu pretestību. Aplūkosim trīs sakarības, kas raksturo spriegumus:

$$U_{AB} = R_1 I, \quad U_{BC} = R_2 I, \quad U_{BC} = U - U_{AB}.$$

Pirmā no tām (2.2) nozīmē, ka spriegums  $U_{AB}$  **uz konstantās pretestības**  $R_1$  ir proporcionāls strāvai – tā grafiks **aug lineāri** līdz ar strāvu. Otrā izteiksme nav ērta analīzei, jo tajā abi lielumi ( $R_2$  un  $I$ ) ir mainīgi, tāpēc spriegumu  $U_{BC}$  atrod kā divu zināmo spriegumu starpību. Ievērojiet: ja kādu spriegumu nevar atrast pēc Oma likuma (2.2), paliek iespēja izmantot spriegumu vienādojumu (2.5).



2.19. att. Grafiki aktīva divpola režīmu ilustrēšanai: spriegumi (a), jaudas (b).

Spriegumu grafiki atkarībā no strāvas parādīti 2.19.a attēlā. Pievērsiet uzmanību sprieguma  $U_{BC}$  grafikam: **pieaugot strāvai, spriegums uz slodzes pretestības samazinās**. Līdzīga parādība novērojama, slogojot jebkuru līdzstrāvas avotu.

Trešais režīms ar īpašu nosaukumu ir **saskaņotais režīms**. To iegūst, ja abas sprieguma dalītāja pretestības ir vienādas:  $R_2 = R_1$ . Kopējā pretestība ( $R_1 + R_2$ ) tad ir divreiz lielāka nekā īsslēguma režīmā, tāpēc strāva  $I$  ir divas reizes mazāka par īsslēguma strāvu. Spriegums  $U$  dalās divās vienādās daļās. Arī abu rezistoru patērētās jaudas ir vienādas. Ar ko saskaņotais režīms ievērojams – redzam jaudu grafikā (2.19.b).

### Jaudu atkarība no slodzes

Jaudas 2.18.b attēla shēmā apraksta sakarības:

$$P = UI, P_{AB} = R_1 I^2, P_{BC} = R_2 I^2, P_{BC} = P - P_{AB}.$$

Pirmā no tām ir taisnes vienādojums, jo  $U = \text{const}$ .

Otrā izteiksme rāda, ka konstantās pretestības  $R_1$  patērētās jaudas  $P_{AB}$  grafiks ir parabola. Tukšgaitā tās vērtība ir vienāda ar nulli. Otru parabolas punktu atrod saskaņotajā režīmā: pretestība  $R_1$  patērē pusi no kopējās jaudas  $P$ . Trešais punkts atrodams īsslēguma režīmā, kur visu jaudu patērē  $R_1$ , jo  $R_2 = 0$ , tāpēc  $P_{AB} = P$ .

Jaudas  $P_{BC}$  grafikam trīs punktus atrast var tikpat vienkārši. Tukšgaitā (pats par sevi saprotams) un īsslēguma režīmā ( $R_2 = 0$ ) slodzes pretestība jaudu nepatērē:  $P_{BC} = 0$ , bet saskaņotajā režīmā tā patērē tieši pusi no avota jaudas  $P$ . No 2.19.b attēla grafika saprotams, kāpēc saskaņotajam režīmam ir īpašs nosaukums: saskaņotajā režīmā **jaudai slodzes pretestībā ir maksimālā vērtība**. Var pavingrināties arī analītiski noteikt strāvas vērtību, pie kuras lietderīgā jauda sasniedz maksimumu. Jaudas izteiksmes atvasinājumu pēc strāvas pielīdzina nullei:

$$\frac{dP_{BC}}{dI} = \frac{d(UI - R_1 I^2)}{dI} = U - 2R_1 I = 0, I = \frac{U}{2R_1} = \frac{I_{is}}{2}.$$

Redzam, ka šī strāvas  $I$  vērtība ir puse no īsslēguma strāvas – tāpat tiešām atbilst saskaņotajam režīmam.

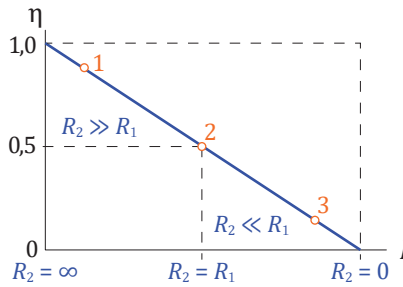
### Lietderības koeficienta atkarība no slodzes

Uzskatot, ka jaudas lietderīgā daļa ir slodzes pretestības  $R_2$  patērētā jauda  $P_{BC}$ , lietderības koeficients  $\eta$  ir tās attiecība pret kopējo jaudu. Pēc pārveidojuma iegūstam:

$$\eta = \frac{P_{BC}}{P} = \frac{U_{BC} I}{UI} = \frac{U_{BC}}{U}.$$

Tā kā  $U = \text{const}$ , tad lietderības koeficienta grafiks ir līdzīgs sprieguma  $U_{BC}$  grafikam. Mērogu atrodam, zinot, ka saskaņotajā režīmā lietderīgā jauda ir tieši puse no kopējās jaudas.

Lietderības koeficienta grafiks rāda, ka, palielinot slodzes strāvu  $I$  no tukšgaitas līdz īsslēguma režīmam, sakarā ar jaudas zudumu  $P_{AB} = R_1 I^2$  pieaugumu lietderības koeficients samazinās no maksimālās vērtības (100 %) līdz nullei. Ievērojiet, ka saskaņotajā režīmā lietderības koeficienta vērtība ir tikai 50 %.



2.20. att. Lietderības koeficienta  $\eta$  grafiks.

### Secinājumi

Aizvietošanas shēmas (2.18.b att.) analīzes rezultātā iegūtos rezultātus var attiecināt uz **jebkuru līdzstrāvas ķēdi, kas darbojas ar maināmu slodzi**.

Piemēram, maināma ir **līdzstrāvas pārvades līnijas** slodze. 2.18.b attēla shēmā tad spriegums  $U$  atbilst spriegumam līnijas sākumā,  $U_{BC}$  – spriegumam līnijas beigās,  $U_{AB}$  – sprieguma kritumam līnijā,  $R_1$  – ļoti lielai pārvades līnijas vadu pretestībai,  $R_2$  – relatīvi mazai slodzes pretestībai (daudzi patērētāji slēgti paralēli). Jauda  $P_{AB}$  tad ir jaudas zudumi līnijā,  $P_{BC}$  – līdz patērētājiem novadītā jauda. Pie šādas pretestību attiecības ( $R_2 \ll R_1$ ) pārvades līnija darbojas tuvu īsslēguma režīmam (**punktā 3** 2.20. attēla grafikā) ar ārkārtīgi zemu lietderības koeficientu  $\eta$  un arī spriegumu (2.19.a att.) pie patērētāja  $R_2$ . Tas ļāva 19. gadsimta beigās secināt, ka enerģijas pārvade lielos attālumos ar līdzstrāvu nav iespējama. Tāpēc lieto pavisam citu principu, ievērojami paaugstinot spriegumu līnijas sākumā, lai pārvadītu enerģiju ar daudz mazāku strāvu, un pie patērētāja spriegumu samazina. Minēto sprieguma paaugstināšanu/pazemināšanu veic ar transformatoriem – maiņstrāvas iekārtām.

Otrs piemērs: analīzes rezultātus var attiecināt uz jebkuru **līdzstrāvas avotu** (piemēram, līdzstrāvas ģeneratoru vai akumulatoru bateriju), uzskatot, ka  $U$  attēlo avota EDS,  $U_{BC}$  – spriegumu uz avota spailēm, bet  $R_1$  – avota iekšējo pretestību. Grafiks  $U_{BC} = f(I)$  – pareizāk, tā sākuma daļa, – ir tipiska līdzstrāvas avota **ārējā raksturlīkne**.

Šos rezultātus arī izmanto, **saskaņojot** nelielas jaudas elektronisko shēmu daļu, piemēram, pastiprinātāja pakāpju pretestības. Tad  $U$  ir pirmās pastiprinātāja pakāpes EDS,  $R_1$  – tās izejas pretestība,  $U_{BC}$  – spriegums otrās pakāpes ieejā, bet  $R_2$  – tās ieejas pretestība utt.

Jautājumam par visizdevīgāko režīmu viennozīmīga atbilde nav iespējama. Piemēram, **enerģētiskā** – lielas jaudas iekārtās – noteicošais ir lietderības koeficients un darba režīmu izvēlas daudz tuvāk tukšgaitai nekā saskaņotajam režīmam (**punkts 1** lietderības koeficienta grafikā 2.20. att.), t. i., ļoti tālu no īsslēguma režīma. Tad avota pretestībai  $R_1$  jābūt daudzkārt mazākai par slodzes pretestību  $R_2$ . Turpretī **nelielas jaudas ķēdēs** – piemēram, automātikas shēmās vai radiotehnikā – bieži vien ir nepieciešams nodot no vienas shēmas daļas otrā maksimāli iespējamo jaudu, nerēķinoties ar zudumiem, tad izvēlas režīmu tuvu saskaņotajam režīmam (2.20. att. **punkts 2**).



## Ievietojiet vispiemērotākos vārdus

1. .... elementu līdzstrāvas ķēdē var aizstāt ar vadu.
2. Kapacitīvu elementu līdzstrāvas ķēdē var aizstāt ar .....
3. EDS algebriskā summa ..... ir vienāda ar ..... algebrisko summu.
4. EDS ir avots, ja tā ..... un EDS ..... virzieni sakrīt.
5. Pievienojot paralēli rezistoram otru rezistoru ar lielāku pretestību, slēguma ekvivalentā pretestība .....
6. Lietojot Kirhofa vienādojumu metodi, ..... vienādojumus sastāda visiem ....., izņemot vienu.
7. Lietojot Kirhofa vienādojumu metodi, ..... vienādojumus sastāda visiem ..... kontūriem.
8. Ekvivalentā ..... metodi lieto shēmām ar ..... slodzes pretestību.
9. Ķēde ar virknes slēgumu ir ..... dalītājs.
10. Palielinot slodzes strāvu, spriegums uz līdzstrāvas avota spailēm .....
11. .... jaudu slodzes pretestībā iegūst ..... režīmā.

## Salīdziniet atbildes

1) induktīvu; 2) pārtaraukumu; 3) kontūrā, sprieguma kritumu; 4) strāvas, faktiskie; 5) samazinās; 6) strāvu, mezgliem; 7) spriegumu, neatkarīgiem; 8) ģenerātorā, maināmu; 9) sprieguma; 10) samazinās; 11) vislielāko, saskaņotajā.

## 3. NODAĻA

### Mainstrāvas ķēdes

Konkurences cīņā ar līdzstrāvu maiņstrāvas sistēmas negaidīti kļuva pārākas 19. gs. beigās sakarā ar mēģinājumiem pārvadīt elektrisko enerģiju lielākos attālumos. Izrādījās, ka enerģijas piegāde patērētājiem bez pārmērīgiem jaudas un sprieguma zudumiem garā pārvades līnijā iespējama vienīgi ar ievērojami samazinātu strāvu tajā – tātad ar ievērojami paaugstinātu spriegumu. Ģenerators sprieguma pārveidošanai augstspriegumā un pēc tam sprieguma pazemināšanai ceļā līdz patērētājiem izmanto transformatorus. Tie var būt tikai maiņstrāvas iekārtas, jo to darbības pamatā ir maiņnāgs elektromagnētiskais lauks.

Visizplatītākie ir elektriskās enerģijas avoti, kuru **EDS vai spriegums laikā mainās pēc sinusa likuma**. Elektriskās ķēdes ar šādiem avotiem sauc par sinusoidālas maiņstrāvas (vai īsāk – maiņstrāvas) ķēdēm. Latvijas un citu Eiropas valstu elektriskajos tīklos spriegums mainās sinusoidāli ar 50 Hz **frekvenci**. Ķēdēs ar lineāriem elementiem ( $R, L, C$ ) tad arī visas strāvas un spriegumi mainās sinusoidāli ar tādu pašu frekvenci. ASV, Kanādā un Japānā **rūpnieciskā frekvence** ir 60 Hz.

Kā redzējam, līdzstrāvas ķēžu aprēķinos katram spriegumam vai strāvai ir viena skalāra vērtība. Maiņstrāvas ķēžu analīze un aprēķini ir sarežģītāki, jo, saskaitot un reizinot sinusoidālus spriegumus (strāvas) vienādojumos (1.5), (1.6), (1.7), rezultātu būtiski ietekmē šo sinusoīdu savstarpējā nobīde laikā – **fāžu nobīde**.

Lai efektīvāk veiktu darbības ar sinusoidāliem spriegumiem un strāvām (saskaitīšanu, reizināšanu un atvasināšanu) un vispār izvairītos no diferenciālvienādojumu risināšanas, ir izveidotas divas maiņstrāvas ķēžu analīzes pamatmetodes.

Pirmā no tām, **vektoru diagrammu metode**, pamatojas uz sinusoidālu strāvu un spriegumu aizstāšanu ar vektoriem (tad diviem sinusoidālas funkcijas parametriem – amplitūdai un sākumfāzei – atbilst divi vektora parametri: modulis un virziens). Šī metode ļauj sastādīt formulas konkrētās shēmas aprēķinam, izmantojot tai atbilstošu vektoru diagrammu. Vektoru diagrammu metode paredzēta vienkāršāko shēmu analīzei, taču tā ir uzskatāma, un tās paņēmienus var izmantot, aprēķinot arī sarežģītākas maiņstrāvas ķēdes.

Otra, tā saucamā **simboliskā metode**, ir tīri analītiska, un to var izmantot jebkuras sarežģītības pakāpes maiņstrāvas ķēdes aprēķinam. Šeit spriegumu un strāvu sinusoīdas, kā arī elementu pretestības un divpolu jaudas attēlo ar **kompleksiem lielumiem**.



Aprēķinos jālieto komplekso skaitļu algebra, toties pati pieeja ievērojami vienkāršojas: iespējams pilnībā lietot līdzstrāvas ķēžu aprēķina metodiku.

Šajā nodaļā aplūkota vektoru diagrammu metode. Simboliskā metode – nākamajā nodaļā.

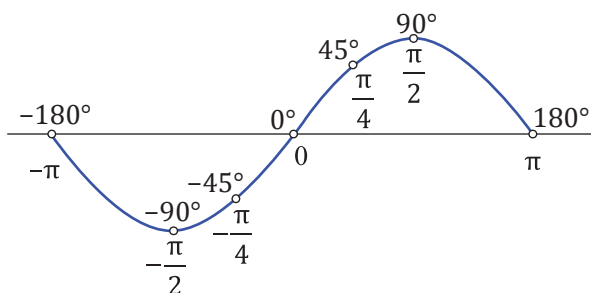
### Šajā nodaļā jūs iepazīsities ar

- sinusoidāli mainīgu strāvu (spriegumu) raksturojošiem lielumiem: divi svarīgākie no tiem ir efektīvā vērtība un fāžu nobīde,
- četru elementu vienādojumiem maiņstrāvas ķēdēs,
- spriegumu un strāvu vienādojumiem un to izmantošanu, zīmējot vektoru diagrammas,
- divpola aktīvās, reaktīvās un pilnās jaudas formulām,
- vektoru diagrammu metodi maiņstrāvas ķēžu analīzei: elementu vektoru diagrammām, vektoru diagrammu zīmēšanas principiem, strāvas komponentēm, virknes slēguma pretestību trīsstūri u. c.,
- vienkāršāko maiņstrāvas ķēžu aprēķiniem ar vektoru diagrammu metodi,
- dažiem maiņstrāvas ķēžu piemēriem: jaudas mērīšanu, induktivitātes spoles parametru noteikšanu, spriegumu rezonansi, jaudas koeficienta uzlabošanu.

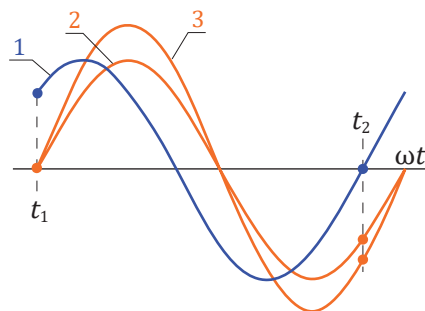
## Pamatjēdzieni un pieņemtie apzīmējumi

### Sinusoidālas funkcijas fāzes

Daži sinusoidālu funkciju piemēri:  $\sin x$ ,  $\sin(2\pi ft)$ ,  $\sin(\omega t + \pi/3)$ . Neatkarīgi no argumenta rakstura tās ir periodiskas funkcijas ar periodu  $2\pi$  jeb  $360^\circ$ . **Fāze ir sinusoidālas funkcijas arguments** – minētajos piemēros attiecīgi:  $x$ ,  $2\pi ft$ ,  $\omega t + \pi/3$ . Parasti aplūko funkcijas galveno intervālu: periodu, kurā fāze mainās diapazonā no  $-\pi$  līdz  $\pi$  (no  $-180^\circ$  līdz  $180^\circ$ ).



3.1. att. Jēdziens par sinusoidālas fāzēm.



3.2. att. Sinusoīdu fāžu salīdzināšana.

Fāzes vērtības ilustrē sinusoidālas funkcijas grafiks – sinusoīda (3.1. att.). Neatkarīgi no ordinātu ass novietojuma negatīvā pusperioda laikā sinusoīdas fāze mainās no  $-\pi$  līdz 0 (radiānos) vai no  $-180^\circ$  līdz  $0^\circ$  (grādos). Pozitīvā pusperioda laikā – attiecīgi no 0 līdz  $\pi$  jeb no  $0^\circ$  līdz  $180^\circ$ . Pozitīvam sinusoīdas maksimumam atbilst fāze  $\pi/2$  (jeb  $90^\circ$ ), bet punktā ar lielāko negatīvo vērtību fāze ir  $-\pi/2$  (jeb  $-90^\circ$ ). Ievērojiet, ka fāzes vērtība ir vienāda ar nulli vienīgi punktā, kur sinusoīda **pieaugot** šķērso abscisu asi, t. i., pozitīvā pusperioda sākumā.

Periods, frekvence, leņķiskā frekvence

Mainstrāvas ķēdē spriegumi un strāvas ir sinusoidālas **laika**  $t$  funkcijas. Fāzes izmaiņa par  $2\pi$  notiek **perioda**  $T$  laikā (3.3. att.). **Frekvence**  $f$  ir periodu skaits sekundē. Fāzes izmaiņas ātrumu  $2\pi/T$  jeb **leņķisko frekvenci**  $\omega$  lietosim elementu  $L$  un  $C$  pretestību formulās. Sakarības starp virsrakstā minētajiem lielumiem:

$$f = \frac{1}{T}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \quad (3.0.1)$$

Tātad rūpnieciskajai frekvencei  $f = 50$  Hz atbilst periods  $T = 20$  ms un leņķiskā frekvence  $\omega = 314$  s $^{-1}$ .

Divi svarīgākie lielumi – fāžu nobīde un efektīvā vērtība

Fāžu nobīde

Par fāžu nobīdi sauc divu sinusoidālu lielumu **fāžu starpību**. Saskaitot vairāku strāvu sinusoīdas, parasti meklē šo strāvu **fāžu nobīdes** attiecībā pret viena kopēja sprieguma sinusoīdu. Un otrādi, lai summētu vairākus spriegumus, meklē šo spriegumu fāžu nobīdi attiecībā pret kopējas strāvas sinusoīdu. Tādēļ maiņstrāvas ķēžu teorijā svarīga loma ir divpola (arī atsevišķa elementa vai avota) **sprieguma un strāvas** sinusoīdu fāžu nobīdei. To pieņemts **apzīmēt ar**  $\varphi$ . Ievērojiet, ka fāžu nobīde  $\varphi$  sastopama gandrīz visās 3.1. tabulas formulās.

Pieņemsim, ka kāda divpola spriegums un strāva **laikā** mainās sinusoidāli ar vienu un to pašu frekvenci, bet ar dažādām sākumfāzēm (sākumfāze  $\alpha$  ir fāzes vērtība momentā  $t = 0$ ):

$$u = U_0 \sin(\omega t + \alpha_U), \quad i = I_m \sin(\omega t + \alpha_I).$$

Fāžu nobīde  $\varphi$  rāda, par cik grādiem vai radiāniem spriegums apsteidz strāvu. To nosaka, no sprieguma fāzes vērtības atņemot strāvas fāzes vērtību:

$$\varphi = (\omega t + \alpha_U) - (\omega t + \alpha_I) = \alpha_U - \alpha_I. \quad (3.0.2)$$

Fāžu nobīde  $\varphi$  ir vienāda ar sākumfāžu starpību, un tās vērtība laikā nemainās.

Fāžu nobīdi raksturo ar vārdiem “**apsteidz fāzē**”, “**atpaliek fāzē**” vai “**sakrīt fāzē**”. Ja sprieguma fāze ir lielāka par strāvas fāzi ( $\varphi > 0^\circ$ ), tad saka, ka spriegums apsteidz fāzē strāvu par  $\varphi$  grādiem (radiāniem) vai arī ka strāva atpaliek fāzē no sprieguma par  $\varphi$  grādiem (radiāniem).

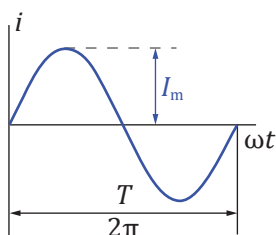
### 3.1. piemērs

Lai novērtētu divu sinusoīdu fāžu nobīdi 3.2. attēla laika diagrammā, salīdzināsim to fāzes kādā laika momentā. Momentā  $t_1$  pirmās sinusoīdas fāze ir  $45^\circ$ , bet otrās sinusoīdas fāze ir  $0^\circ$ . Tātad pirmā sinusoīda **apsteidz fāzē** otro par  $45^\circ$ . To pašu rezultātu iegūsim arī, salīdzinot abu sinusoīdu fāzes jebkurā citā laika momentā – piemēram, laika momentā  $t_2$ , kad tās ir  $0^\circ$  un  $-45^\circ$ . Otrā un trešā sinusoīda **sakrīt fāzē**, jo to fāzes ikvienā laika momentā ir vienādas.

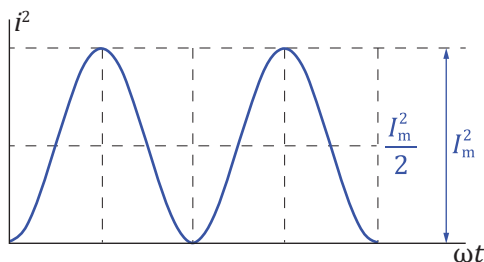
Sinusoidāla sprieguma (strāvas, EDS) efektīvā vērtība

Otrs **formulu tabulā** plaši pārstāvēts lielums ir sprieguma vai strāvas efektīvā vērtība ( $U, I$ ).

Laikā mainīgus elektriskus lielumus attēlo ar **laika diagrammām** – uz abscisu ass ir laiks  $t$  (vai fāze  $\omega t$ , ko mēri grādos vai radiānos). Laika diagrammās (3.3. att.) un sinusoīdu izteiksmēs sastopamas **maksimālās (amplitūdas) vērtības** ( $U_m, I_m$  vai  $E_m$ ).



3.3. att. Sinusoidālas strāvas laika diagramma.



3.4. att. Sinusoidālas strāvas kvadrāta laika diagramma.

Aprēķinos un elektriskajos mērījumos lieto nevis maksimālās, bet efektīvās vērtības ( $U, I$  vai  $E$ ). Par **efektīvo vērtību** sauc strāvas, sprieguma vai EDS **vidējo kvadrātisko vērtību** perioda laikā.

Mainīga lieluma vidējo kvadrātisko vērtību kādā intervālā nosaka šādi: atrod šī lieluma **kvadrāta** vidējo vērtību dotajā intervālā un pēc tam meklē šīs vērtības kvadrātsakni. Sinusoīdas vidējo kvadrātisko vērtību ilustrē 3.4. attēls. Sinusoīdu  $i(t)$  ar maksimālo vērtību  $I_m$  kāpina kvadrātā. Iegūst līkni ar divkārtīgu frekvenci un maksimālo vērtību  $I_m^2$ . Tad atrod šīs līknes vidējo vērtību:  $I_m^2/2$ , kas ir meklējamās efektīvās vērtības kvadrāts. Izvelkot kvadrātsakni, iegūstam efektīvās vērtības izteiksmi:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \quad (3.0.3)$$

Elektromagnētiskās sistēmas mēraparāti – ampērmetrs un voltmētrs – uzrāda strāvas un sprieguma efektīvo vērtību. Aprēķinu parasti sāk ar avota sprieguma efektīvo vērtību (piemēram,  $U = 220 \text{ V}$ ) un risinājuma gaitā meklē katras strāvas vai sprieguma efektīvo (nevis maksimālo) vērtību.

## Darbības ar sinusoīdām maiņstrāvas ķēžu vienādojumos

Septiņi elektrisko ķēžu pamatvienādojumi (skat. 1. nodaļu) ir spēkā arī sinusoidālas maiņstrāvas ķēdēs. Taču tie attiecas uz strāvu, spriegumu, EDS un jaudu sinusoīdu **momentānajām vērtībām** ( $i, u, e, p$ ), bet nekādā ziņā ne uz efektīvajām vērtībām. Maiņstrāvas ķēdēs būtu jāveic sinusoīdas atvasināšana (1.3), (1.4), vairāku sinusoīdu saskaitīšana/atņemšana (1.5), (1.6) un reizināšana (1.7). Maiņstrāvas ķēžu teorija izveidota, lai efektīvi veiktu šīs darbības vai piedāvātu tām alternatīvas metodes.

3.1. tabula

**Darbības ar sinusoīdām un to rezultāti**

(1.3)–(1.7)	Darbība	Jauni jēdzieni	(3.3)–(3.7)
$u = L \frac{di}{dt}$	Atvasināšana	Fāžu nobīde	$U = X_L I, \varphi = 90^\circ$
$i = C \frac{du}{dt}$			$U = X_C I, \varphi = -90^\circ$
$u_{13} = u_{12} + u_{23}$	Saskaitīšana	Vektoru diagramma	$\vec{U}_{13} = \vec{U}_{12} + \vec{U}_{23}$
$\sum i = 0$			$\sum \vec{I} = 0$
$p = ui$	Reizināšana	Jaudas koeficients	$P = UI \cos \varphi$

Turpmāk parādīts, kāpēc rodas fāžu nobīdes, kā tās ietekmē maiņstrāvas aktīvo jaudu  $P$  un kā efektīvi veikt sinusoīdu saskaitīšanu.

Kāpēc rodas fāžu nobīdes

Atvasināsim sinusoīdu un salīdzināsim sinusoīdas un atvasinājuma fāzes:

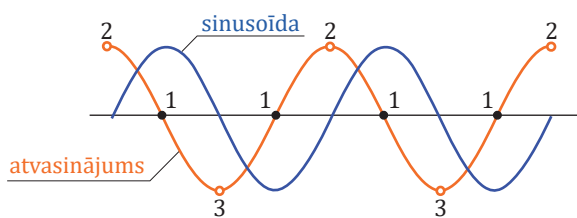
$$\frac{d(\sin \omega t)}{dt} = \omega \cos \omega t = \omega \sin(\omega t + 90^\circ).$$

Redzam, ka **sinusoīdas atvasinājums apsteidz fāzē sinusoīdu par  $90^\circ$** .

Ja tas nepārlicina, aplūkosim 3.5. attēlu. Sinusoīdas (attēlota ar zilo līniju) maksimuma un minimuma punktos, kur atvasinājuma vērtība ir vienāda ar nulli, diagrammā atliekam punktus "1". Tur, kur sinusoīda pieaugot šķērso abscisu asi, izmaiņas ātrums ir vislielākais (atvasinājumam ir vislielākā pozitīvā vērtība), – punktus "2". Sinusoīdas pozitīvā pusperioda beigās tās vērtība samazinās visstraujāk, tāpēc punktus "3" sinusoīdas atvasinājumam ir vislielākā negatīvā vērtība. Savienojot šos punktus, iegūstam sinusoīdas atvasinājuma grafiku (oranžā līnija), kas tiešām apsteidz fāzē sinusoīdu par  $90^\circ$ .

Iegūtais secinājums – sinusoīdas atvasinājums apsteidz fāzē sinusoīdu par  $90^\circ$  – atļauj izprast divus nozīmīgus maiņstrāvas ķēžu teorijas faktus.

Atvasinājumu satur induktīva elementa  $L$  vienādojums (1.3):  $u = L di/dt$ . Spriegums uz šī elementa ir proporcionāls strāvas atvasinājumam (t. i., šeit strāva  $i$  ir sinusoīda, bet spriegums  $u$  – tās atvasinājums). Tas nozīmē, ka **induktīva elementa spriegums apsteidz fāzē strāvu par  $90^\circ$** .



3.5. att. Sinusoīda un tās atvasinājums.

Līdzīgi tam, pieņemot, ka kapacitīva elementa spriegums mainās sinusoidāli, no vienādojuma (1.4):  $i = C du/dt$  izriet, ka kapacitīva elementa strāva (tā proporcionāla sprieguma atvasinājumam) apsteidz spriegumu fāzē par  $90^\circ$ . Tāpēc otra svarīgā sakarība, ko izmanto, lai ikreiz nenodarbotos ar atvasināšanu: **kapacitīva elementa spriegums atpaliek fāzē no strāvas par  $90^\circ$** .

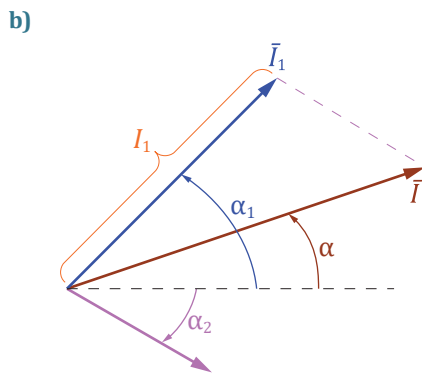
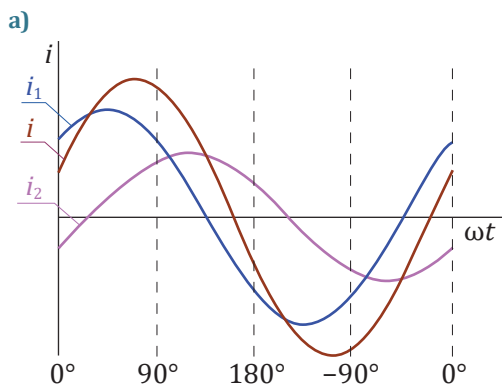
Rezistīvs elements  $R$  saskaņā ar vienādojumu (1.2):  $u = Ri$ , fāžu nobīdi neizraisa: **rezistīva elementa sprieguma un strāvas sinusoīdas sakrīt fāzē**.

Sinusoīdu saskaitīšana: jēdziens par vektoru diagrammām

Pati sarežģītākā darbība ar sinusoīdām ir to saskaitīšana. Pieņemsim, ka jāaskaita divas sinusoidālas strāvas:

$$i_1 = \sqrt{2} \cdot 5 \sin(\omega t + 45^\circ), \quad i_2 = \sqrt{2} \cdot 3 \sin(\omega t - 30^\circ).$$

3.6.a attēla laika diagrammā parādītas abas sinusoīdas un to grafiskās saskaitīšanas rezultāts – strāva  $i(t)$ . Pārlicinieties, ka jebkurā laika momentā ir spēkā sakarība:  $i = i_1 + i_2$ . Pārlicinieties arī, ka saskaitīšanas rezultāts arī ir sinusoīda. Lieki uzsvērt, ka grafiskā saskaitīšana ir pārāk darbietilpīga. Matemātikas rokasgrāmatās atrodas formulas tikai divu sinusoīdu saskaitīšanai, bet arī tās ir pietiekami sarežģītas. Maiņstrāvas ķēžu aprēķinos nākas summēt vairākas strāvas vai spriegumus, tāpēc nepieciešama efektīvāka metode.



3.6. att. Sinusoidālu strāvu saskaitīšana (a), sinusoīdu attēlošana ar vektoriem (b).

Katru sinusoidālu lielumu var attēlot kā vektoru plaknē. Tiešām, ja visi lielumi mainās ar kopēju frekvenci  $\omega$ , tad sinusoīdu tāpat kā vektoru raksturo tikai divi parametri.

Piemēram, vektora garums (modulis) atbilst sinusoīdas amplitūdai, bet virziens (leņķis jeb arguments  $\alpha$ ) – tās sākumfāzei. Sinusoīdu vietā summē attiecīgos vektorus, un rezultējošā vektora modulim un leņķim atbilst meklējamās sinusoīdu summas amplitūda un sākumfāze.

1. Sinusoidālu lielumu, kura efektīvā vērtība ir  $U$  un sākumfāze ir  $\alpha$ , attēlo ar vektoru  $\vec{U}$ , kura **modulis atbilst sinusoīdas efektīvajai vērtībai, bet virziens – sākumfāzei.**

Piemēram, 3.6. attēlā strāvu  $i_1(t)$  attēlo kā vektoru  $\vec{I}_1$ . Tā garums (5 vienības) atbilst attēlojamās strāvas efektīvajai vērtībai  $I_1 = 5$  A, bet virziens ar horizontāli pa labi vērstu līniju veido leņķi  $\alpha_1 = 45^\circ$ , kas atbilst šīs strāvas sākumfāzei. Tāpat kā polārajās koordinātās matemātikā par pozitīvu uzskata virzienu pretēji pulksteņa rādītāja kustībai. Vektora  $\vec{I}_2$  virzienu nosaka tas, ka strāvas  $i_2(t)$  sākumfāze ir negatīva ( $\alpha_2 = -30^\circ$ ).

2. Dotās shēmas spriegumus un strāvas attēlo **vektoru diagrammā**, lai tajā veiktu darbības ar vektoriem un iegūtu aprēķina formulas. 3.6.b attēls ir vektoru diagrammas piemērs. Diagrammā veikta abu strāvu vektoru saskaitīšana. Iegūtā vektora  $\vec{I}$  modulis ir 6,5 vienības, bet leņķa arguments  $\alpha = 18^\circ$ . Rezultāti pagaidām iegūti, izmērot attēlojošā vektora garumu un virzienu. Aprēķina formulu izveidošanu aplūkosim šīs nodaļas turpinājumā. Uzrakstām vektoram  $\vec{I}$  atbilstošās sinusoīdu summas izteiksmi:

$$i = \sqrt{2} \cdot 6,5 \sin(\omega t + 18^\circ).$$

3. Vektoru diagrammā tāpat kā laika diagrammā fāžu nobīdes ir svarīgākas nekā sākumfāzes. Piemēram, 3.6.b attēla diagrammā būtiski ir tas, ka strāvas  $i_1$  vektors apsteidz fāzē strāvas  $i_2$  vektoru par  $75^\circ$ . Pārbīdot laika diagrammā (3.6.a att.) ordinātu asi vai pagriežot visu vektoru diagrammu (3.6.b att.), strāvu summas efektīvā vērtība  $I$  neizmainīsies.
4. Maiņstrāvas ķēdēs spriegumu un strāvu vienādojumi (1.5) un (1.6), protams, joprojām ir spēkā. Taču tie liek summēt momentānās vērtības, kas būtu pārāk sarežģīti. Tāpēc maiņstrāvas ķēdēs **spriegumu un strāvu vienādojumus** formulē spriegumu un strāvu **vektoriem**: (3.5) un (3.6). Svarīgi atcerēties, un tas vēl tiks atkārtots vairākkārt, ka spriegumu un strāvu vienādojumi nav domāti skaitlisko vērtību summēšanai. Tātad: drīkst saskaitīt momentānās vērtības (tas sarežģīti) vai vektorus (visnotaļ veicināma rīcība!), bet nekādā ziņā efektīvās vērtības (nopietns pārkāpums!).
5. Vektoru diagramma domāta nevis precīzai spriegumu vai strāvu vektoru saskaitīšanai, bet gan formulu izveidošanai. Pirms aprēķina uzskicē konkrētās shēmas **vektoru diagrammu** – tās zīmēšanai izmanto **trīs elementu** ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ) **vektoru diagrammas** (3.8. att.) un **strāvu un spriegumu vienādojumus**. Pēc tam no vektoru diagrammas, izmantojot **trigonometrijas formulas**, izveido aprēķinam piemērotas izteiksmes ar spriegumu vai strāvu **efektīvajām vērtībām**.

6. Šāda pieeja – nepieciešamo vienādojumu iegūšana no iepriekš uzzīmētas vektoru diagrammas – ir **vektoru diagrammu metodes** pamatā. Vēlāk redzēsim, ka **virtnes slēguma** gadījumā vienādojumus iegūst vienkāršāk – no **pretētību trīsstūriem** (3.9.c att.).

### Sinusoīdu reizinājuma vidējā vērtība

Apskatīsim divu fāzē nobīdītu sinusoidālu funkciju reizinājumu:

$$y_1 = a \sin \omega t, \quad y_2 = b \sin(\omega t + \varphi).$$

Izmantojot trigonometrijas formulu “sinusu reizinājums = kosinusu starpība”, iegūst:

$$y = y_1 y_2 = \frac{1}{2}[ab \cos \varphi - ab \cos(2\omega t + \varphi)].$$

Reizinājuma vidējā vērtība ir tā konstantā daļa, jo kosinusa funkcijas vidējā vērtība vienāda ar nulli:

$$Y_{\text{vid}} = \frac{1}{2}ab \cos \varphi. \quad (3.0.3)$$

Tātad sinusoidālu funkciju reizinājuma vidējo vērtību būtiski ietekmē **fāžu nobīde**. Zināmos apstākļos vidējā vērtība var pat būt vienāda ar nulli.

### Elementu vienādojumi

Iepazināties ar principiem, kas izriet no sinusoidālu lielumu atvasināšanas, reizināšanas un saskaitīšanas. Tos izmanto, piemērojot elektrisko ķēžu pamatvienādojumus (1.1)–(1.7) maiņstrāvas ķēdēm. Šeit apkoposim un precizēsime iegūtos rezultātus.

#### Elementa $E$ vienādojums

Vienādojums (1.1)  $u = -e$  nozīmē, ka sprieguma un EDS sinusoidu fāžu starpība ir  $180^\circ$ . Šādas sinusoidas attēlo ar pretēji vērstiem vektoriem:

$$\bar{U} = -\bar{E}. \quad (3.1)$$

#### Rezistīva elementa $R$ vienādojums

Ievietojot sinusoidālas strāvas izteiksmi rezistīva elementa  $R$  vienādojumā (1.2), iegūst sprieguma sinusoidas izteiksmi:

$$i = \sqrt{2}I \sin \omega t, \quad u = Ri = \sqrt{2}RI \sin \omega t.$$

Pirmkārt, sprieguma izteiksmē redzama sprieguma efektīvā vērtība:  $U = RI$ . Otrkārt, rezistīva **elementa  $R$  sprieguma un strāvas sinusoidas sakrīt fāzē**. Tātad rezistīvu elementu  $R$  maiņstrāvas ķēdē raksturo šādas divas sakarības:

$$U = RI, \quad \varphi = 0^\circ. \quad (3.2)$$

## Induktīva elementa $L$ vienādojums

Ievietojot sinusoidālas strāvas izteiksmi induktīva elementa  $L$  vienādojumā (1.3), iegūst induktīva elementa  $L$  sprieguma sinusoidas izteiksmi:

$$i = \sqrt{2}I \sin \omega t, \quad u = L \frac{di}{dt} = \sqrt{2}\omega LI \sin(\omega t + 90^\circ).$$

Pirmkārt, sprieguma izteiksmē atrodam tā efektīvo vērtību:  $U = \omega LI$ . Lai piešķirtu elementa  $L$  vienādojumam Oma likuma formu (spriegums, proporcionalitātes koeficients, strāva), ieved jēdzienu **induktīvā pretestība**:

$$X_L = \omega L. \quad (3.3a)$$

Otrkārt, sprieguma izteiksmē fāze ir par  $90^\circ$  lielāka nekā strāvas fāze, t. i., **induktīva elementa spriegums apsteidz fāzē strāvu par  $90^\circ$** . Tātad induktīvu elementu  $L$  maiņstrāvas ķēdē raksturo šādas divas sakarības:

$$U = X_L I, \quad \varphi = 90^\circ. \quad (3.3)$$

## Kapacitīva elementa $C$ vienādojums

Ievietojot sinusoidāla sprieguma izteiksmi kapacitīva elementa  $C$  vienādojumā (1.4), iegūst kapacitīva elementa  $C$  strāvas sinusoidas izteiksmi:

$$u = \sqrt{2}U \sin \omega t, \quad i = C \frac{du}{dt} = \sqrt{2}\omega CU \sin(\omega t + 90^\circ).$$

Pirmkārt, strāvas izteiksmē redzama tās efektīvā vērtība:  $I = \omega CU$ . Lai piešķirtu elementa  $C$  vienādojumam Oma likuma formu, ievad jēdzienu **kapacitīvā pretestība**:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (3.4a)$$

Otrkārt, strāvas  $i$  izteiksme apstiprina zināmo: atvasinot sinusoidu, fāze pieaug par  $90^\circ$ . Tātad **kapacitīva elementa spriegums atpaliek fāzē no strāvas par  $90^\circ$** . Fāžu nobīde ir sprieguma fāze mīnus strāvas fāze, tāpēc šeit tā ir negatīva. Tātad kapacitīvu elementu  $C$  maiņstrāvas ķēdē raksturo šādas divas sakarības:

$$U = X_C I, \quad \varphi = -90^\circ. \quad (3.4)$$

Pretestību  $X_L$  (3.3a) un  $X_C$  (3.4a) kopīgais nosaukums – **reaktīvās pretestības** (kopīgais apzīmējums:  $X$ ). **Reaktīvās pretestības ir atkarīgas no frekvences** ( $\omega$  vai  $f$ ), turklāt dažādi atkarīgas: pieaugot frekvencei, induktīvā pretestība  $X_L$  pieaug, bet kapacitīvā pretestība  $X_C$  samazinās. Tas nozīmē, ka viena un tā pati ķēde pie dažādām frekvencēm iegūst atšķirīgas īpašības.

Pretestību  $R$  maiņstrāvas ķēdē sauc par **aktīvo pretestību**. Atšķirībā no reaktīvajām pretestībām ( $X_L$  un  $X_C$ ) tā nav atkarīga no frekvences.



## Spriegumu un strāvu vienādojumi

Lai izvairītos no sinusoīdu momentāno vērtību saskaitīšanas (1.5), spriegumu vienādojumu formulē sinusoīdu attēlojošiem vektoriem:

$$\bar{U}_{13} = \bar{U}_{12} + \bar{U}_{23}, \quad (3.5)$$

kur indeksi 1, 2 un 3 ir brīvi izvēlētu shēmas punktu apzīmējumi.

$$\sum \pm \bar{I} = 0. \quad (3.6)$$

Vienādojums (3.6) ir Kirhofa pirmais likums (jeb Kirhofa strāvu vienādojums) maiņstrāvai. Vienādojumu sastāda shēmas mezglam. Strāvas, kas nosacīti pienāk mezglam (spriežot pēc to bultiņu virzieniem **shēmā**), vienādojumā raksta ar plusa zīmi, bet no mezgla nosacīti aizejošās strāvas – ar mīnusa zīmi. Sastādīto vienādojumu izmanto, zīmējot vektoru diagrammu.

Vienādojumi (3.5) un (3.6) ir vienīgie no maiņstrāvas ķēžu pamatvienādojumiem, kuri **nav domāti, lai tajos ievietotu skaitļus**. Šie vienādojumi palīdz uzzīmēt vektoru diagrammu, ko savukārt izmanto, lai sastādītu aprēķiniem piemērotus vienādojumus ar spriegumu (strāvu) efektīvajām vērtībām. Kā zīmēt vektoru diagrammas – tas ir viens no svarīgākajiem turpmāk apgūstamajiem paņēmieniem.

## Divpola aktīvā jauda

Generēto un patērēto enerģiju maiņstrāvas ķēdēs ērtāk raksturot nevis ar jaudas momentāno vērtību  $p(t)$ , bet ar laikā nemainīgu un ērti izmērāmu lielumu – momentānās jaudas vidējo vērtību  $P$ . **Momentānās jaudas  $p$  vidējo vērtību sauc par aktīvo jaudu  $P$** . Aktīvo jaudu mērī vatos ( $W$ ).

Lai iegūtu aktīvās jaudas formulu, nosaka momentāno jaudu pēc formulas  $p = ui$  (1.7) un atrod tās vidējo vērtību. Apskatīsim vispārīgu gadījumu ar brīvi izvēlētu fāžu nobīdi  $\varphi$ . Pieņemsim, ka kāda divpola strāva mainās sinusoidāli, bet spriegums apsteidz strāvu fāzē par  $\varphi$  (3.6.a att.):

$$i = I_m \sin \omega t, \quad u = U_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Atrodam momentānās jaudas izteiksmi:

$$\begin{aligned} p = ui &= U_m I_m \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi - \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + \varphi) = \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Momentānās jaudas vidējā vērtība ir iegūtās izteiksmes konstantā daļa  $UI \cos \varphi$ , jo kosinusa funkcijas vidējā vērtība perioda laikā vienāda ar nulli.

Tātad divpolam ar fāžu nobīdi  $\varphi$  momentānās jaudas  $p$  vidējā vērtība jeb aktīvā jauda  $P$  ir

$$P = UI \cos \varphi. \quad (3.7)$$

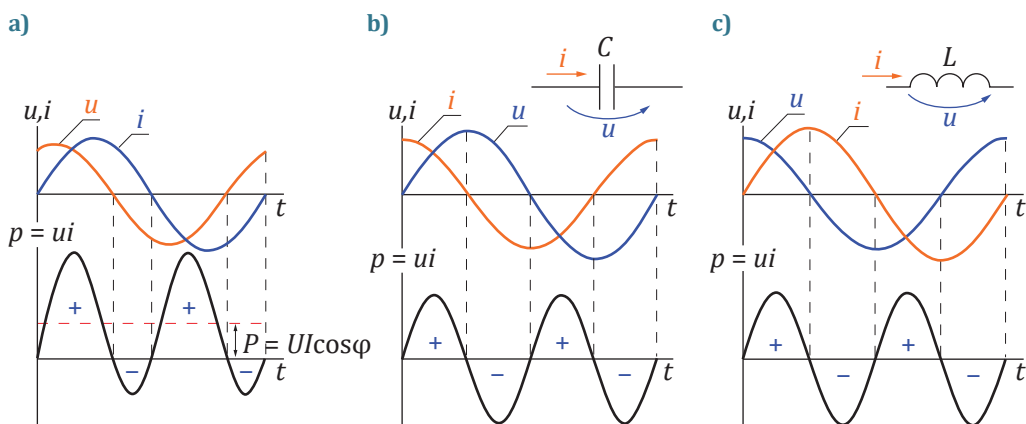
Šis rezultāts nozīmē, ka divpola aktīvā jauda  $P$  ir visai **atkarīga no fāžu nobīdes**. Piemēram, induktīvs elements  $L$  ( $\varphi = 90^\circ$ ) vai kapacitīvs elements  $C$  ( $\varphi = -90^\circ$ ) aktīvo jaudu nepatērē. Vienīgie aktīvās jaudas patērētāji ir rezistīvie elementi  $R$  ( $\varphi = 0^\circ$  un  $\cos\varphi = 1$ ).

Lielumu  $\cos\varphi$  sauc par **jaudas koeficientu**. Tam ir svarīga nozīme enerģētikā, piemēram, lai jaudu  $P$  pārvadītu pa līniju ar spriegumu  $U$ , vajadzīga mazāka strāva  $I$ , ja  $\cos\varphi$  vērtība ir lielāka (t. i., tuvāka maksimāli iespējamai  $\cos\varphi = 1$ ).

Aplūkosim enerģijas svārstības maiņstrāvas ķēdē, izmantojot momentānās jaudas  $p$  laika diagrammas.

Laika diagramma 3.7.a attēlā atbilst vispārīgam gadījumam, kad divpola strāva  $i$  atpaliek no sprieguma  $u$  par leņķi  $\varphi$ . Redzams, ka laikā, kad strāva un spriegums vienlaikus ir pozitīvi vai negatīvi, to reizinājums – momentānā jauda – ir pozitīva, divpols ir patērētājs. Ja tikai viens no šiem lielumiem ir pozitīvs, tad jauda  $p$  ir negatīva, daļa no divpola uzkrātās enerģijas atgriežas pārējā ķēdē. Diagrammā parādīta arī momentānās jaudas  $p$  vidējā vērtība – aktīvā jauda  $P$ .

3.7.b attēls ilustrē enerģijas svārstības ķēdē ar kondensatoru  $C$ . Tad fāžu nobīde  $\varphi = -90^\circ$  un strāva apsteidz spriegumu. Pirmajā un trešajā perioda ceturtdaļā kondensators ir **patērētājs**, jo tā sprieguma absolūtā vērtība un uzkrātā enerģija ( $CU^2/2$ ) **pieaug**. Otrajā un ceturtajā perioda ceturtdaļā tas darbojas kā **avots** – uzkrātā enerģija atgriežas ķēdē. Līdzīgiem procesiem (3.7.c att.) var izsekot arī ķēdē ar induktīvo elementu  $L$  jeb ideālu induktivitātes spoli. Tajā notiek enerģijas svārstības starp spoles magnētisko lauku (tā enerģija proporcionāla strāvas momentānās vērtības kvadrātam) un pārējo ķēdi.



3.7. att. Momentānās jaudas  $p$  diagramma: vispārīgā gadījumā (a), elementam  $C$  (b), elementam  $L$  (c).

Aktīvās jaudas formula (3.7) un laika diagrammas (3.7. att.) rāda, ka maiņstrāvas ķēdēs **aktīvās jaudas patērētāji var būt tikai rezistīvie elementi  $R$** . Elementi  $L$  un  $C$  tikai piedalās enerģijas svārstībās, kas notiek, periodiski pieaugot un samazinoties spoles magnētiskā lauka vai kondensatora elektriskā lauka enerģijai.

## Formulu tabulas fragments

Septiņi pamatvienādojumi (1.1)–(1.7), pārveidoti lietošanai maiņstrāvas ķēdēs kopā ar dažiem papildinājumiem, ir apkopoti 3.2. tabulā. Ievērojiet, ka tabulā vairs nav atvasinājumu! Sastopamas galvenokārt strāvu un spriegumu efektīvās vērtības ( $U, I$ ) un fāžu nobīdes ( $\varphi$ ). Katru no elementiem  $R, L$  un  $C$  raksturo nevis viena, bet divas sakarības: vienai no tām ir Oma likuma forma, otra parāda katram elementam raksturīgo fāžu nobīdi. Strāvu un spriegumu vienādojumi formulēti sinusoīdu attēlojošiem vektoriem – tos lieto vektoru diagrammu zīmēšanai.

Tabulā nav parādītas reaktīvo pretestību izteiksmes (3.3a) un (3.4a). Jauno formulu iegūšanas principi būs paskaidroti turpinājumā.

- Vienādojums (3.8) ir piektā “elementa” – virknes slēguma – vienādojums. Vēlāk redzēsīm, ka elementu virknes slēgumam formulās lietojamus lielumus iegūst no **pretestību trīsstūra**.
- Maiņstrāvas ķēdēs lieto arī citus jaudu raksturojošus lielumus:  $Q$  – **reaktīvā jauda** un  $S$  – **pilnā jeb šķietamā jauda**, kuru formulas ir (3.7a) un (3.7b) saskaņā ar **jaudu trīsstūri**.

3.2. tabula

### Formulas maiņstrāvas ķēžu aprēķinam ar vektoru diagrammu metodi

Vienādojumi	Ar vektoru diagrammu metodi	
Elementam $E$	$\bar{U} = -\bar{E}$	(3.1)
Elementam $R$	$U = RI, \varphi = 0^\circ$	(3.2)
Elementam $L$	$U = X_L I, \varphi = 90^\circ$	(3.3)
Elementam $C$	$U = X_C I, \varphi = -90^\circ$	(3.4)
Virknes slēgumam	$U = ZI, \varphi = ?$	(3.8)
Spriegumiem	$\bar{U}_{13} = \bar{U}_{12} + \bar{U}_{23}$	(3.5)
Strāvām	$\sum \pm \bar{I} = 0$	(3.6)
Divpola jaudai	$P = UI \cos\varphi$	(3.7)
	$Q = UI \sin\varphi$	(3.7a)
	$S = UI$	(3.7b)

## Vektoru diagrammas un pretestību trīsstūri

Vektoru diagrammu zīmē pirms shēmas aprēķina, tāpēc ka formulu tabulā (3.2. tab.) nav formulu spriegumu vai strāvu **efektīvo vērtību** saskaitīšanai. Vienādojumu (3.5) vai (3.6) izmanto tikai aprēķina formulu izveidošanas sākuma posmā, zīmējot vektoru diagrammu dotajai shēmai. No diagrammas pēc tam izveido **aprēķina formulas** ar strāvu vai spriegumu efektīvajām vērtībām. No vektoru diagrammas iegūst arī formulas fāžu nobīdes  $\varphi$  noteikšanai.

Šāda pieeja ir vektoru diagrammu metodes pamatā, un to lieto divu tipu shēmu aprēķinam un analīzei: **virknes slēgumam** un **shēmām ar paralēliem zariem**. Taču vektoru diagrammu metodei ir arī plašāka nozīme. Pirmkārt, to lieto arī sarežģītākām shēmām, ja tajās zināmi atsevišķi spriegumi – tādas ir vairums trīsfāžu maiņstrāvas ķēžu. Otrkārt, aprēķinot sarežģītas shēmas ar simbolisko metodi, ar vektoru diagrammu metodes principiem var kontrolēt katru aprēķina soli.

Zīmējot vektoru diagrammu, izmanto:

- spriegumu un strāvu vienādojumus,
- trīs elementu ( $R, L$  un  $C$ ) vektoru diagrammas,
- sarežģītāka “elementa” – virknes slēguma – pretestību trīsstūri.

### Trīs elementu vektoru diagrammas

Zīmējot vektoru diagrammas, izmanto trīs elementu vektoru diagrammas (3.8. att.). Katra no tām rāda konkrēta elementa tipa ( $R, L$  vai  $C$ ) strāvas un sprieguma vektoru **savstarpējo** novietojumu – atbilstoši fāžu nobīdei  $\varphi$ . Piemēram, ja viena vektora (strāvas vai sprieguma) virziens izvēlēts vai atrasts aprēķina gaitā, tad attiecīgā elementa vektoru diagramma viennozīmīgi nosaka otra vektora virzienu.

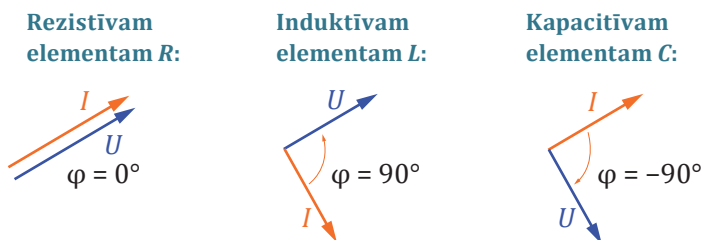
Zīmējot vektoru diagrammas, jāievēro:

- elementa strāvas un sprieguma pieņemtajiem virzieniem (bultiņu virzieniem **shēmā**) jāsakrīt;
- fāžu nobīdes leņķi  $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$  vienmēr atliek no strāvas vektora **līdz sprieguma vektoram**;
- tāpat kā matemātikā **pozitīvs leņķa virziens** ir pretējs pulksteņa rādītāja kustības virzienam.

Ja leņķis  $\varphi$  ir pozitīvs: strāva atpaliek fāzē no sprieguma, divpolam ir induktīvs raksturs.

Ja leņķis  $\varphi$  ir negatīvs: strāva apsteidz fāzē spriegumu, divpolam ir kapacitīvs raksturs;

- vektoru diagrammā virs vektora apzīmējuma “garumzīmi” neliek (tekstā vai formulās tas ir obligāti), jo tāpat ir saprotams, ka diagrammā ir tikai vektori.



3.8. att. Elementu  $R, L$  un  $C$  vektoru diagrammas.

## Virknes slēguma pretestību trīsstūris

Katra shēmas elementa ( $R$ ,  $L$  vai  $C$ ) vienādojumu (3.2), (3.3) vai (3.4) veido divas sakarības: Oma likuma izteiksme un fāžu nobīdes  $\varphi$  vērtība. Uzskatot jebkuru virknes slēgumu par divpolu, arī to var raksturot ar divām sakarībām:

$$U = ZI, \quad \varphi = ? \quad (3.8)$$

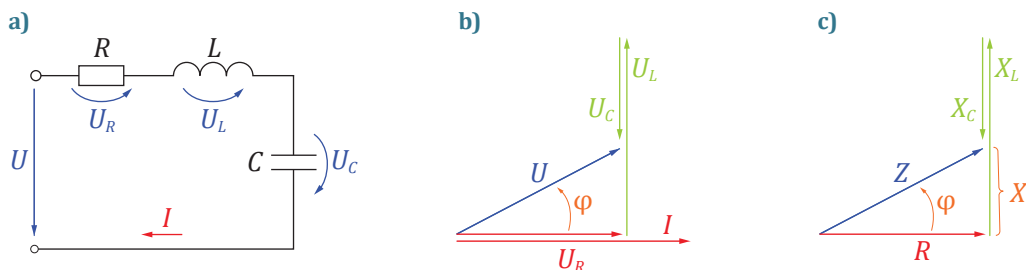
Turpmāk parādīts, kā virknes slēguma **pilnās pretestības**  $Z$  un fāžu nobīdes  $\varphi$  formulas iegūst no **pretestību trīsstūra**.

3.9.a attēla shēma ar elementu virknes slēgumu pievienota maiņsprieguma  $U$  avotam. Visos elementos plūstot strāvai  $I$ , uz katra no elementiem ir spriegums:  $U_R$ ,  $U_L$  vai  $U_C$ .

Zīmējot vektoru diagrammu (3.9.b att.), tajā parāda visu minēto lielumu vektorus. Brīvi izvēlēta virzienā atliekam kopējās strāvas  $I$  vektoru. Trīs spriegumu vektoru virzienus nosaka trīs elementu vektoru diagrammas (3.8. att.). Sprieguma  $U$  vektoru atrodam, izmantojot spriegumu vienādojumu (3.5):

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C.$$

Ērtākai vektoru summēšanai katru nākamo vektoru sāk zīmēt no iepriekšējā vektora galapunkta. Saskaitīšanas rezultāts ir vektors  $\vec{U}$  no sākumpunkta līdz pēdējā vektora galam. Diagrammu pabeidz, atzīmējot fāžu nobīdes leņķi  $\varphi$  (no strāvas vektora!).



3.9. att.  $RLC$  virknes slēgums (a), vektoru diagramma (b), virknes slēguma pretestību trīsstūris (c).

Pretestību trīsstūri iegūst, ievērojot, ka visi spriegumi vektoru diagrammā ir proporcionāli strāvai  $I$  saskaņā ar elementu vienādojumiem (3.2), (3.3) un (3.4) un arī ar pieņēmumu  $U = ZI$  (3.8), kurā ir pagaidām nezināma divpola pilnā pretestība  $Z$ :

$$U_R = RI, \quad U_L = X_L I, \quad U_C = X_C I, \quad U = ZI.$$

Izdalot katru no spriegumiem ar **kopējo** strāvu  $I$ , iegūst vektoru diagrammai līdzīgu **pretestību trīsstūri** (3.9.c att.). Bultiņas te nav vektori, tās tikai rāda zīmēšanas secību. Ievērojiet, ka pretestību trīsstūri un formulas (3.8) un (3.8a) lieto nevis jebkurai shēmai vai shēmas daļai, bet gan **tikai virknes slēgumam**, jo tikai virknes slēgumā elementos plūst kopēja strāva.

No pretestību trīsstūra izriet formulas elementu virknes slēguma pilnās pretestības  $Z$  un fāžu nobīdes leņķa  $\varphi$ , vai jaudas koeficienta  $\cos\varphi$  noteikšanai:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{X_L - X_C}{Z}\right), \quad \cos\varphi = \frac{R}{Z}. \quad (3.8a)$$

Fāžu nobīdes  $\varphi$  zīmi (plusa vai mīnusa) drošāk atrast, izmantojot arksinusa formulu. Ja lietotu  $\cos\varphi$  formulu, papildus būtu jāsalīdzina reaktīvās pretestības ( $X_L$  ar  $X_C$ ) vai arī jāzīmē pretestību trīsstūris. Piemēram, ja  $X_L > X_C$ , tad  $\varphi > 0^\circ$ . Citiem vārdiem, slēgumam ir induktīvs raksturs, strāva atpaliek fāzē no sprieguma par leņķi  $\varphi$ . Un otrādi, ja  $X_C > X_L$ , tad  $\varphi < 0^\circ$  un slēguma raksturs ir kapacitīvs.

Elementu virknes slēguma pretestību trīsstūri elementu zīmē šādā secībā (3.9.c att.):

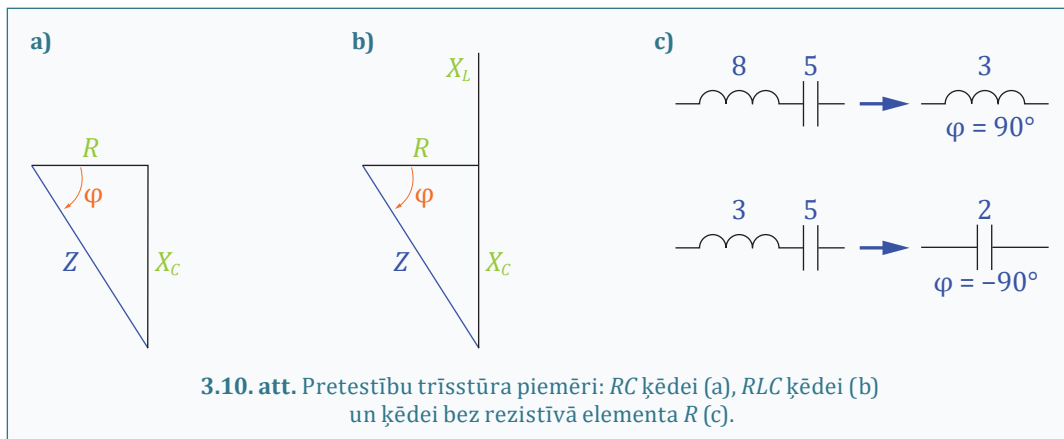
- horizontāli pa labi atliek aktīvajai pretestībai  $R$  atbilstošu nogriezni (ja slēgumā ir vairākas šādas pretestības – atbilstošu to summai),
- šī nogriežņa galapunktā uz augšu atliek induktīvajai pretestībai  $X_L$  atbilstošu nogriezni,
- no šī nogriežņa galapunkta uz leju – kapacitīvajai pretestībai  $X_C$  atbilstošu nogriezni,
- savienojot konstrukcijas sākuma un beigu punktu, iegūst virknes slēguma **pilno pretestību  $Z$** ,
- $\varphi$  ir leņķis starp horizontālo kateti  $R$  un hipotenūzu  $Z$ ; **leņķi  $\varphi$  atliek virzienā no horizontāles ( $R$ )**.

Formulas (3.8a) var lietot jebkuram elementu virknes slēgumam jebkurā kombinācijā ( $RLC$ ,  $RL$ ,  $RC$ ). Arī elementu  $L$  un  $C$  virknes slēgumam, kad pretestību trīsstūri (ar bezgalīgi mazu  $R$ ) var tikai iztēloties. Dažreiz (piemēram, ja kāds no parametriem –  $R$ ,  $X_L$ ,  $X_C$  – ir maināms) pretestību trīsstūris var izrādīties uzskatāmāks par formulām (3.8a).

## 3.2. piemērs

3.10. attēlā parādīti pretestību trīsstūri shēmu fragmentiem ar elementu virknes slēgumu: 3.10.a attēls – shēmai ar elementu  $R$  un  $C$  virknes slēgumu; 3.10.b attēls – shēmai ar elementu  $R$ ,  $L$  un  $C$  virknes slēgumu, ja induktīvā pretestība  $X_L$  ir mazāka par kapacitīvo pretestību  $X_C$ . Ievērojiet, ka leņķi  $\varphi$  atliek no horizontāles ( $R$ ). Ja induktīvā pretestība ir lielāka par kapacitīvo pretestību, tad  $\varphi > 0^\circ$ , pretējā gadījumā  $\varphi$  ir negatīvs.

3.10.c attēlā parādīts, kā rīkoties, ja virknes slēgumā nav rezistīva elementa  $R$ . Pretestību trīsstūri varētu uzzīmēt, iztēlojoties ārkārtīgi mazu  $R$  vērtību, taču tas nav vajadzīgs.  $Z$  un  $\varphi$  vērtības varētu arī noteikt pēc formulām (3.8a), taču vienkāršāk ir aizstāt šo slēgumu **ar vienu elementu  $L$  vai  $C$**  atkarībā no tā, kura no pretestībām ir pārsvarā. Piemēram, ja  $X_L > X_C$ , tad virknes slēgumu aizstāj ar induktīvu elementu  $L$ , kam saskaņā ar (3.3) fāžu nobīde  $\varphi = 90^\circ$ . Un otrādi: ja pārsvarā ir kapacitīvā pretestība, tad slēgumu aizvieto ar elementu  $C$ , kam saskaņā ar (3.4) fāžu nobīde  $\varphi = -90^\circ$



### Vektoru diagrammas zīmēšana shēmai ar paralēliem zariem

Vektoru diagrammu konkrētai shēmai zīmē, lai iegūtu aprēķina formulas spriegumu vai strāvu saskaitīšanai. Protams, pirms aprēķina strāvu un spriegumu vērtības vēl nav zināmas, tādēļ diagrammā mērogam pagaidām nav nozīmes. Taču noteikti jāievēro vektoru virzieni, ko nosaka trīs elementu vektoru diagrammas (3.8. att.).

Vektoru diagrammas zīmēšanai izmanto trīs elementu vektoru diagrammas (3.8. att.), zara pretestību trīsstūri (3.9.c att.) un strāvu vienādojumu (3.6).

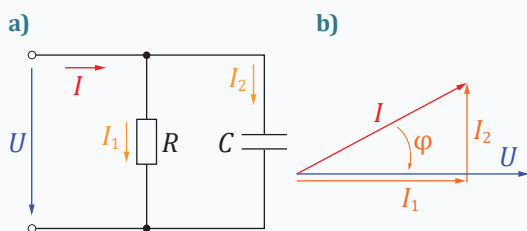
- Shēmā apzīmē spriegumu  $U$  un visas strāvas (tā, lai to pozitīvie virzieni sakristu ar sprieguma pieņemto virzienu).
- Brīvi izvēlētā virzienā atliek sprieguma  $U$  vektoru.
- Attiecībā pret sprieguma  $U$  vektoru atliek visu zaru strāvu vektorus.
- Zaram ar vienu elementu strāvas vektora virzienu nosaka šī elementa vektoru diagramma (3.8. att.) vai elementa vienādojums (3.2), (3.3) vai (3.4), bet zaram ar virknes slēgumu fāžu nobīdi  $\varphi$  var uzzināt no pretestību trīsstūra (3.9.c att.) vai vienādojumiem (3.8a).
- Avota strāvas jeb kopējās patērētās strāvas  $I$  vektoru atrod, summējot visu zaru strāvu vektorus saskaņā ar **strāvu vienādojumu** (3.6).
- Parāda fāžu nobīdes leņķi  $\varphi$  starp strāvas  $I$  un avota sprieguma  $U$  vektoru.

### 3.3. piemērs

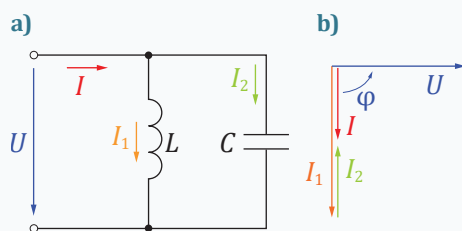
Uzzīmēt vektoru diagrammu 3.11.a attēlā parādītajai shēmai.

#### Atrisinājums

1. Shēmā ir divi punkti, tātad viens spriegums. Vektoru diagrammā tātad būs sprieguma  $U$  vektors un trīs strāvu vektori. Visu trīs strāvu bultiņu virzienus **shēmā** pieņem sprieguma bultiņas virzienā.



3.11. att.  $RC$  paralēlslēgums (a),  
vektoru diagramma (b).



3.12. att.  $LC$  paralēlslēgums (a),  
vektoru diagramma (b).

2. Vektoru diagrammā pirmo zīmējam kopējā sprieguma  $U$  vektoru.
3. Izmantojot elementu  $R$  un  $C$  vektoru diagrammas (3.8. att.), zīmējam strāvu vektorus. Strāva  $I_1$  sakrīt fāzē ar sprieguma, tāpēc tās vektoru atliek sprieguma  $U$  vektora virzienā. Strāva  $I_2$  apsteidz fāzē spriegumu  $U$  par  $90^\circ$ , tāpēc tās vektoru atlieksim uz augšu. Kur to atlikt (ja diagrammā vektorus var brīvi pārvietot, saglabājot to virzienus)? Atbilde: strāvas  $I_2$  vektoru sākam no vektora  $I_1$  galapunkta, paredzot strāvu vektoru saskaitīšanu.
4. Avota strāvas vektoru atrodam kā zaru strāvu vektoru summu saskaņā ar vienādojumu (3.6):  $\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$ .
5. Visbeidzot parādām fāžu nobīdes leņķi  $\varphi$  (atcerēsimies, ka to vienmēr atliek **no strāvas vektora sprieguma vektora virzienā**). Šeit  $\varphi$  vērtība ir negatīva – atbilstoši kapacitīvam ķēdes raksturam avota strāva  $I$  apsteidz fāzē spriegumu  $U$ .
6. Diagramma zīmēta, lai no tās iegūtu vienādojumu ar strāvu efektīvajām vērtībām, ko atšķirībā no (3.6) var lietot aprēķinā. No diagrammas iegūst arī vienādojumus jaudas koeficienta  $\cos\varphi$  un fāžu nobīdes leņķa noteikšanai:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2}, \quad \cos\varphi = \frac{I_1}{I}.$$

### 3.4. piemērs

Uzzīmēt vektoru diagrammu 3.12.a attēlā parādītajai shēmai. Salīdzinot ar iepriekšējo piemēru, pirmajā zarā rezistora  $R$  vietā ir induktīvs elements  $L$ . Dots, ka pirmā zara induktīvā pretestība  $X_L$  ir mazāka par otrā zara kapacitīvo pretestību  $X_C$ .

#### Atrisinājums

Diagrammas zīmēšanas plāns tāds pats kā 3.3. piemērā. Tomēr iegūtā vektoru diagramma (3.12.b att.) ir pilnīgi citāda, jo pirmā zara strāva  $I_1$  atpaliek no sprieguma  $U$  par  $\varphi_1 = 90^\circ$ . Tādēļ no diagrammas iegūst pavisam citus rezultātus:

$$I = I_1 - I_2, \quad \varphi = 90^\circ.$$

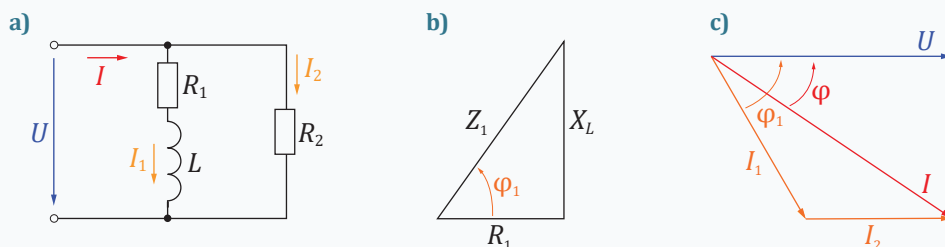


### 3.5. piemērs

Uzzīmēt vektoru diagrammu 3.13.a attēla shēmai, uzskatot virknes slēgumu pirmajā zarā par divpolu.

#### Atrisinājums

1. Apzīmējam spriegumu un visas strāvas shēmā (3.13.a att.).
2. Vektoru diagrammā (3.13.c att.) brīvi izvēlētā virzienā zīmējam sprieguma  $U$  vektoru.
3. Strāvas  $I_1$  vektora virzienu nosakām, uzzīmējot pirmā zara pretestību trīsstūrī (3.13.b att.). Zarā ar induktīvo pretestību leņķis  $\varphi_1$  ir pozitīvs. Tātad strāvas  $I_1$  vektors (3.13.c att.) atpaliek no sprieguma vektora par leņķi  $\varphi_1$ .



3.13. att. Shēma ar paralēliem zariem (a), pirmā zara pretestību trīsstūrīs (b), vektoru diagramma (c).

4. Otrā zara strāvas  $I_2$  vektora virzienu nosaka elementa  $R$  vektoru diagramma (3.8. att):  $\varphi_2 = 0^\circ$ . Avota strāvas  $I$  vektoru atrodam, saskaitot zaru strāvu vektorus saskaņā ar strāvu vienādojumu:  $\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$ .
5. Parādām fāžu nobīdes leņķi  $\varphi$ , atliekot to no strāvas  $I$  vektora līdz sprieguma  $U$  vektoram.
6. Šādas vektoru diagrammas izmantošana aprēķinā paskaidrota turpinājumā.

#### Strāvas aktīvā un reaktīvā komponente

Vektoru diagrammu shēmai ar paralēliem zariem izmanto, lai, summējot zaru strāvu vektorus, atrastu avota strāvu  $I$  un tās fāžu nobīdi attiecībā pret avota spriegumu  $U$ . Lieto šādu paņēmieni: katru strāvas vektoru sadala divās **savstarpēji perpendikulārās komponentēs**.

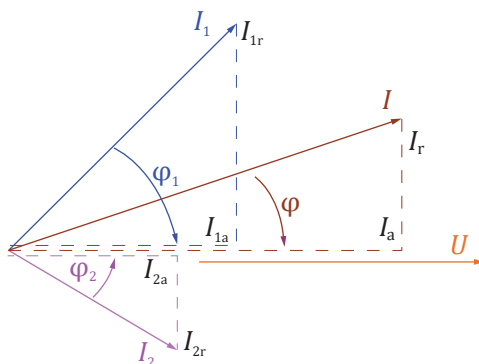
3.14. attēlā parādīti divu strāvu ( $I_1$  un  $I_2$ ) vektori un šo strāvu vektoru summa  $\vec{I}$ . Vektori sadalīti komponentēs.

Strāvas vektora **aktīvā komponente**  $I_a$  ir strāvas vektora projekcija uz sprieguma vektora ass. Atcerēsimies, ka projicēt nozīmē reizināt ar leņķa kosinusu:

$$I_a = I \cos \varphi.$$

**Reaktīvā komponente**  $I_r$  ir perpendikulāra sprieguma vektora virzienam, un tās izteiksme satur sinusu:

$$I_r = I \sin \varphi.$$



3.14. att. Strāvu vektori un to komponentes.

Tā kā visi fāžu nobīdes leņķi atrodas diapazonā no  $-90$  līdz  $90^\circ$  ( $\cos \varphi$  tad ir nenegatīvs), tad visas saskaitāmo vektoru aktīvās komponentes būs nenegatīvas.

Lai atrastu vektoru summas reaktīvo komponenti, atsevišķo strāvu reaktīvās komponentes arī jāsaskaita, taču šeit saskaitāmo zīmes var būt dažādas. Induktīva rakstura ( $\varphi > 0^\circ$ ,  $\sin \varphi > 0$ ) reaktīvās komponentes ir pozitīvas, bet tās, kuru raksturs ir kapacitīvs ( $\varphi < 0^\circ$ ,  $\sin \varphi < 0$ ) – negatīvas.

$$I_{1r} = I_1 \sin \varphi_1, \quad I_{2r} = I_2 \sin \varphi_2.$$

Šādi atrod vektoru summas  $\bar{I}$  abas komponentes  $I_a$  un  $I_r$ . Tās kopā ar pašu vektoru  $\bar{I}$  veido **taisnleņķa trīsstūri**, no kura tad arī iegūst vajadzīgos vienādojumus:

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_r^2}, \quad \cos \varphi = \frac{I_a}{I}.$$

Dažos gadījumos arī spriegumu vektorus sadala komponentēs (piemēram, 3.15. att.) Tad sprieguma aktīvā komponente  $U_a$  ir sprieguma vektora projekcija uz strāvas vektora ass.

## Jaudas maiņstrāvas ķēdē

Aktīvā, reaktīvā un šķietamā jauda

Līdz šim iepazināmies tikai ar **aktīvo jaudu**  $P$  – tā ir momentānās jaudas vidējā vērtība. Maiņstrāvas ķēdē aktīvo jaudu apraksta formula (3.7):

$$P = UI \cos \varphi.$$

Koeficientu  $\cos\varphi$  aktīvās jaudas formulā sauc par jaudas koeficientu. Aktīvās jaudas mērvienība ir vats ( $W$ ). Aktīvo jaudu patērē tikai rezistīvie elementi ( $R$ ) un arī atsevišķi EDS. Reaktīvie elementi ( $L$  un  $C$ ) piedalās ķēdē notiekošajās enerģijas svārstībās (3.7. att.) un aktīvo jaudu nepatērē.

Ar **reaktīvo jaudu**  $Q$  raksturo enerģijas svārstības ķēdē. Enerģijas apmaiņa notiek reaktīvo elementu ( $L$  un  $C$ ) klātbūtnes dēļ, un tajās var piedalīties arī avota enerģija. Izteiksme reaktīvās jaudas aprēķināšanai:

$$Q = UI \sin\varphi. \quad (3.7a)$$

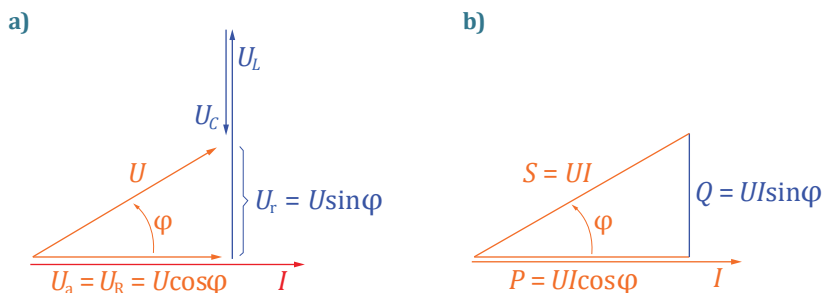
Reaktīvās jaudas mērvienība ir vars<sup>2</sup> (var), ko sauc arī par reaktīvo voltampēru.

**Pilno jaudu**  $S$  definē kā sprieguma un strāvas reizinājumu:

$$S = UI. \quad (3.7b)$$

Pilno jaudu  $S$  (lieto arī nosaukumu “šķietamā jauda”) mēri voltampēros (VA). Jaudai  $S$  atšķirībā no lieluma  $P$  un  $Q$  nav fizikālas jēgas. Pilnā jauda  $S$  ir viens no maiņsprieguma iekārtu (sinhronģeneratoru un transformatoru) kataloga datiem.

Jaudu trīsstūris un citas jaudu formulas



3.15. att. Spriegumu trīsstūris (a), jaudu trīsstūris (b).

Divpola (vai atsevišķa elementa) jaudu formulas (3.7) parāda **jaudu trīsstūris** (3.15.b att.). To iegūst, spriegumu trīsstūrī (3.15.a att.) **pareizinot** spriegumus ar strāvu  $I$ . Reaktīvās un pilnās jaudas formulas no 3.2. tabulas (3.7.a) un (3.7.b) redzamas attēlā.

Izmantojot divpola vienādojumu (3.8), var iegūt arī tādas jaudas formulas **virknes slēgumam**, kurās nav vajadzīga  $\cos\varphi$  vērtība:

$$P = UI \cos\varphi = ZI \cdot I \cos\varphi = I^2 Z \cos\varphi = RI^2;$$

$$Q = UI \sin\varphi = I^2 Z \sin\varphi = XI^2 = (X_L - X_C)I^2;$$

$$S = UI = ZI^2.$$

Sakarību  $P = RI^2$  parasti izmanto, lai noteiktu rezistora pretestību  $R$ , ja zināma patērētā jauda  $P$  un strāva  $I$ .

<sup>2</sup> Dažviet literatūrā reaktīvā voltampēra simbols ir VAR.

## Vektoru diagrammu metodes izmantošanas robežas

### Piemērotība

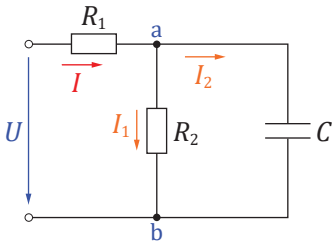
Vektoru diagrammu metode ir piemērota vienkāršu maiņstrāvas ķēžu ar vienu avotu aprēķiniem:

- shēmām, kurās visi elementi slēgti virknē (3.8. piemērs),
- shēmām ar avotam pieslēgtiem paralēliem zariem – katrā zarā var būt viens vai vairāki virknē slēgti elementi (3.9. piemērs),
- arī sarežģītāku shēmu analīzei, ja atsevišķu shēmas daļu spriegumi ir zināmi, – tad shēmu aprēķina pa daļām. Piemēram, trīsfāžu ķēžu pētīšanai visā 5. nodaļā lietosim galvenokārt vektoru diagrammu metodi.

Un vēl viens apsvērumus. Jebkuru sarežģītu maiņstrāvas ķēdi var aprēķināt, izmantojot simbolisko metodi, kas aplūkota nākamajā nodaļā. Lietojot simbolisko metodi, ieteicams kontrolēt katru aprēķina soli ar vektoru diagrammas palīdzību. Pieredze, kas iegūta, apgūstot vektoru diagrammu metodi, te var izrādīties noderīga.

### Nepiemērotība

Vektoru diagrammu metode nav piemērota pat ļoti vienkāršām shēmām ar jauktu slēgumu. Piemēram, 3.16. attēla shēmā posma ab ekvivalento aktīvo un reaktīvo pretestību atrast nav vienkārši. Mācību grāmatās no laikiem, kad darbības ar kompleksajiem skaitļiem bija visai darbietipīgas, saglabājušies virkne jēdzienu (aktīvā, reaktīvā un pilnā vadītspēja) un paņēmieni, ko apgūt nebūtu racionāli, ņemot vērā, ka jebkuru sarežģītāku shēmu var aprēķināt ar universālo simbolisko metodi.



3.16. att. Shēma ar jauktu slēgumu.

3.16. attēla shēmā posmam ab ekvivalento pretestību nevar meklēt līdzīgi tam, kā to darītu līdzstrāvas ķēdē:

$$Z_{ab} = \frac{R_2 \cdot X_c}{R_2 + X_c}$$

Formula ir nepareiza kaut vai tāpēc, ka tās rezultāts būtu viena skaitliska vērtība, nevis pretestību trīsstūra parametri  $Z$  un  $\varphi$ .

Līdzīga formula iespējama tikai ar komplekso pretestību vērtībām, kam ir reālā un imaginārā daļa. Šāda pieeja aplūkota nākamajā nodaļā "4. Simboliskā metode".

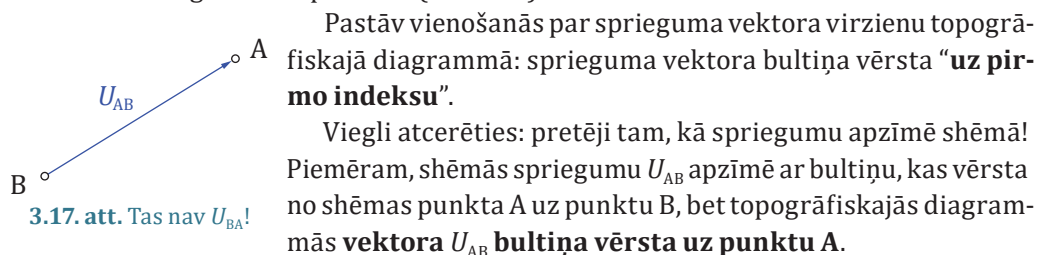
## Topogrāfiskās diagrammas

Pieņemsim, ka shēmā ir pieci punkti – tātad 10 dažādi spriegumi. Kā visērtāk uzglabāt informāciju par tiem? Līdzstrāvas ķēdē pietiktu uzrādīt tikai četrus punktu potenciālus, piektā punkta potenciālu pieņemot vienādu ar nulli. Katru spriegumu tad varētu atrast kā divu punktu potenciālu starpību.

Ar ko atšķiras **maiņstrāvas ķēde**? Ar to, ka katru spriegumu un tāpat arī potenciālu raksturo ne tikai skaitliskā vērtība, bet arī sākumfāze. Attēlojot spriegumu ar vektoru, katram no abiem vektora galiem varētu atbilst kāda shēmas punkta potenciāls. Šis princips tad arī ir topogrāfisko diagrammu pamatā: katra shēmas punkta potenciālam atbilst punkts topogrāfiskajā diagrammā. **Katram spriegumam – potenciālu starpībai – atbilst vektors**, kas savieno divus topogrāfiskās diagrammas punktus.

Kas ir topogrāfiskās diagrammas

Topogrāfiskā diagramma atšķiras no vektoru diagrammas ar to, ka, pirmkārt, tajā nav strāvas vektoru, otrkārt, topogrāfiskajā diagrammā ir punkti: katrs no tiem atbilst kāda shēmas punkta potenciālam. Katram spriegumam shēmā atbilst vektors, kas savieno divus diagrammas punktus (3.17. att.).



Pastāv vienošanās par sprieguma vektora virzienu topogrāfiskajā diagrammā: sprieguma vektora bultiņa vērsta “**uz pirmo indeksu**”.

Viegli atcerēties: pretēji tam, kā spriegumu apzīmē shēmā! Piemēram, shēmās spriegumu  $U_{AB}$  apzīmē ar bultiņu, kas vērsta no shēmas punkta A uz punktu B, bet topogrāfiskajās diagrammās **vektora  $U_{AB}$  bultiņa vērsta uz punktu A**.

Kā uzzīmēt topogrāfisko diagrammu

Lai uzzīmētu maiņstrāvas ķēdes topogrāfisko diagrammu:

- 1) shēmā apzīmē visus punktus – līdz ar to ir noteikti arī indeksi visu spriegumu apzīmējumos;
- 2) zīmē vektoru diagrammu;
- 3) spriegumus no vektoru diagrammas pārnes uz topogrāfisko diagrammu (saglabājot katra vektora garumu un virzienu). Pārnesot pirmo vektoru, saskaņā ar 3.17. attēlā parādīto principu iegūst pirmos divus topogrāfiskās diagrammas punktus. Katru nākamo spriegumu izvēlas tā, lai iegūtu jaunu punktu diagrammā.

### 3.6. piemērs

Uzzīmēt topogrāfisko diagrammu 3.18.a attēlā parādītajai shēmai. Pieņemsim, ka spriegumu efektīvās vērtības ir zināmas:  $U_{AB} = 20 \text{ V}$ ,  $U_{BC} = 30 \text{ V}$ ,  $U_{CD} = 30 \text{ V}$ .

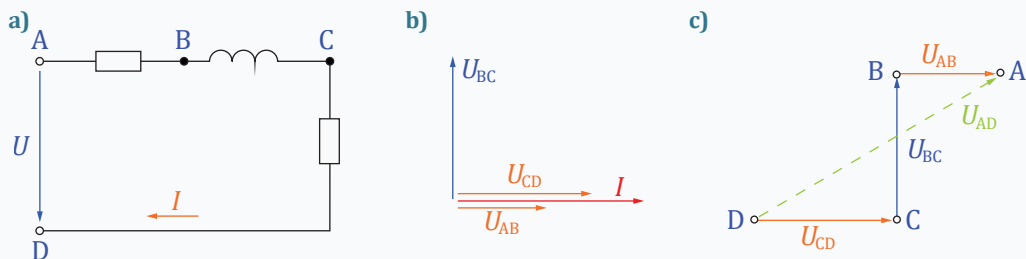
#### Atrisinājums

Shēmā apzīmējam visus punktus (A, B, C un D). Izvēlamies strāvas  $I$  virzienu.

Zīmējam **vektoru diagrammu** (3.18.b att.). Brīvi izvēlētā virzienā atliekam strāvas vektoru. Elementu vektoru diagrammas (3.8. att.) nosaka visu spriegumu vektoru virzienus. Vektoru izvietoējums diagrammā var būt patvaļīgs.

Zīmējot **topogrāfisko diagrammu**, ieteicams shēmu apiet **pretēji strāvas virzienam**. Piemēram, apejot shēmu no punkta D, vispirms sastopam spriegumu  $U_{CD}$ .

Pārnesam tā vektoru uz topogrāfisko diagrammu (3.18.c att.), iegūstam diagrammas pirmos divus punktus: D un C. Pārnesot nākamo vektoru  $\vec{U}_{BC}$ , diagrammā parādās jauns punkts B utt.



3.18. att. Shēma (a), vektoru diagramma (b), topogrāfiskā diagramma (c).

Topogrāfiskā diagramma kompaktā formā satur informāciju par visiem spriegumiem shēmā. Tajā viegli atrast jebkuru sprieguma vektoru. Piemēram, diagrammā ar raustītu līniju parādīts spriegums  $U_{AD}$ .

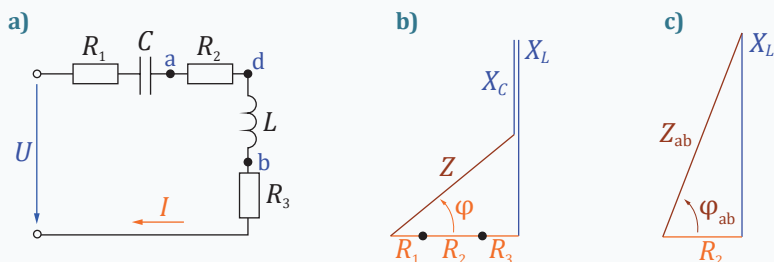
Bez topogrāfiskajām diagrammām nav iedomājama **trīsfāžu maiņstrāvas ķēžu** analīze. Raksturīgi, ka visā grāmatas 5. nodaļā “Trīsfāžu maiņstrāvas ķēdes” izmantota trīsfāžu avota topogrāfiskā diagramma (5.2. att.).

## Aprēķini ar vektoru diagrammu metodi (piemēri)

Tiks apskatīti divi tipiskākie piemēri maiņstrāvas ķēdes aprēķinam ar vektoru diagrammu metodi: shēma ar virknes slēgumu un shēma ar paralēliem zariem. Turpmāk vienmēr ieteicams ievērot šādu principu, kas attiecināms uz shēmu vai tās fragmentu: virknes slēgumam aprēķina formulas iegūst **no pretestību trīsstūra**, bet shēmai ar paralēliem zariem – **no vektoru diagrammas**.

### 3.7. piemērs

Dota maiņstrāvas ķēde ar virknes slēgumu (3.19.a att.). Sprieguma efektīvā vērtība  $U = 220$  V. Shēmas parametri:  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $R_3 = 30 \Omega$ ,  $X_C = 40 \Omega$ ,  $X_L = 120 \Omega$ . Aprēķināt strāvu ķēdē, spriegumu posmā ab, kā arī patērēto aktīvo un reaktīvo jaudu.



3.19. att. Shēma ar virknes slēgumu (a), pretestību trīsstūris (b), pretestību trīsstūris shēmas fragmentam (c).

## Risinājuma plāns

Dotajai shēmai zīmē pretestību trīsstūri. No tā atrod pilnās pretestības  $Z$  un fāžu nobīdes  $\varphi$  vērtību (3.8a). Tas atļauj aprēķināt strāvu  $I$  (3.8), aktīvo jaudu  $P$  un reaktīvo jaudu  $Q$  (3.7). Sprieguma  $U_{ab}$  noteikšanai arī zīmē pretestību trīsstūri posmam ab un atrod tā pilno pretestību  $Z_{ab}$  (3.8a).

## Atrisinājums

Zīmējam pretestību trīsstūri (3.19.b att.). No tā atrodam ķēdes pilno pretestību  $Z$  un fāžu nobīdes leņķi  $\varphi$ . Ievērojot, ka to atliek no horizontāles ( $R$ ), redzam, ka  $\varphi$  vērtība ir pozitīva. Tas arī atbilst ķēdes **induktīvajam raksturam**, ko nosaka reaktīvo pretestību attiecība ( $X_L > X_C$ ).

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2 + R_3)^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100 \, \Omega,$$

$$\cos\varphi = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{Z} = \frac{10 + 20 + 30}{100} = 0,6;$$

$$\sin\varphi = \frac{X_L - X_C}{Z} = \frac{120 - 40}{100} = 0,8.$$

Izmantojot Oma likumu maiņstrāvas ķēdes virknes slēgumam (3.8), atrodam strāvas vērtību:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{100} = 2,2 \, \text{A}.$$

Izmantojot divpola jaudas formulas, atrodam patērēto aktīvo un reaktīvo jaudu:

$$P = UI \cos\varphi = 220 \cdot 2,2 \cdot 0,6 = 290,4 \, \text{W}, \quad Q = UI \sin\varphi = 220 \cdot 2,2 \cdot 0,8 = 387,2 \, \text{var}.$$

Pārlicināties, ka šos rezultātus iespējams iegūt arī citādi:

$$P = (R_1 + R_2 + R_3)I^2 = 60 \cdot 2,2^2 = 290,4 \, \text{W}, \quad Q = (X_L - X_C)I^2 = 80 \cdot 2,2^2 = 387,2 \, \text{var}.$$

Lai aprēķinātu spriegumu  $U_{ab}$ , zīmējam pretestību trīsstūri posmam ab (3.18. c att.), no kura atrodam šī virknes slēguma pilno pretestību:

$$Z_{ab} = \sqrt{R_2^2 + X_L^2} = \sqrt{20^2 + 120^2} = 121,7 \, \Omega.$$

Spriegumu  $U_{ab}$  atrodam, lietojot Oma likumu (3.8) posmam ab:

$$U_{ab} = Z_{ab}I = 121,7 \cdot 2,2 = 267,7 \, \text{V}.$$

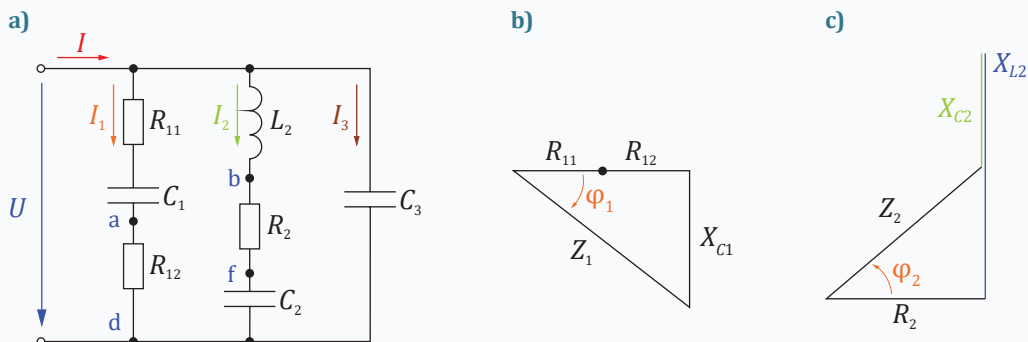
Pārlicinājāties, ka **virknes** slēguma aprēķinam formulas iegūst **no pretestību trīsstūra** – vektoru diagramma nav nepieciešama.

### 3.8. piemērs

Mainsprieguma avotam pieslēgta ķēde, kurā ir trīs paralēli zari (3.20.a att.).

Dotie lielumi:  $U = 100 \text{ V}$ ,  $R_{11} = 10 \ \Omega$ ,  $R_{12} = 20 \ \Omega$ ,  $X_{C1} = 40 \ \Omega$ ,  $R_2 = 80 \ \Omega$ ,  $X_{L2} = 100 \ \Omega$ ,  $X_{C2} = 40 \ \Omega$ ,  $X_{C3} = 100 \ \Omega$ .

Aprēķināt visas strāvas, kā arī patērēto aktīvo un reaktīvo jaudu.



3.20. att. 3.8. piemēra shēma (a), pirmā zara pretestību trīsstūris (b), otrā zara pretestību trīsstūris (c).

### Risinājuma plāns

Šāda tipa shēmu – ar paralēliem zariem – aprēķina secība.

1. Atrod **katra zara** strāvas efektīvo vērtību ( $I_1, I_2, \dots$ ) un fāžu nobīdes leņķi ( $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ). Ja zarā ir tikai viens elements, tad strāvas vērtību un fāžu nobīdi nosaka attiecīgā elementa vienādojums (3.2), (3.3) vai (3.4). Ja zarā ir vairāki elementi, tad zara pilno pretestību  $Z$  un fāžu nobīdi  $\varphi$  nosaka šī zara pretestību trīsstūris (3.8a). Zara strāvas vērtību atrod pēc (3.8).
2. Lai atrastu **kopējās strāvas**  $I$  vērtību (ievērojiet – tā ir nevis abstrakta strāvu summa, bet avota strāva), zīmē vektoru diagrammu, sākot ar sprieguma  $U$  vektoru. Aprēķinātās fāžu nobīdes nosaka katra zara strāvas vektora virzienu. Avota strāvas **vektoru** atrod, summējot zaru strāvu vektorus saskaņā ar vienādojumu (3.6):

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \dots$$

3. Lai izveidotu algebriskas formulas **avota strāvas** un **fāžu nobīdes** noteikšanai, katru strāvas vektoru sadala divās savstarpēji perpendikulārās komponentēs. Aktīvā komponente ir strāvas vektora projekcija uz sprieguma vektora ass. Strāvas  $I$  aktīvā komponente ir vienāda ar zaru strāvu aktīvo komponentu summu:

$$I_a = I_{1a} + I_{2a} + \dots$$

Avota strāvas reaktīvo komponenti atrod, summējot zaru strāvu reaktīvās komponentes.



$$I_r = I_{1r} + I_{2r} + \dots$$

Ievērojiet, ka atsevišķu zaru strāvu reaktīvajām komponentēm var būt dažādas zīmes (plusa vai mīnusa): ja  $X_L > X_C$ , tad fāžu nobīde  $\varphi$  un zara strāvas reaktīvā komponente ir pozitīva; ja  $X_L < X_C$ , tad fāžu nobīde  $\varphi$  un zara strāvas reaktīvā komponente ir negatīva.

4. Avota strāvas  $I$  vektors un abas tā komponentes – aktīvā un reaktīvā – veido strāvu trīsstūri. Tas ir taisnleņķa trīsstūris, un no tā iegūst formulas avota strāvas un fāžu nobīdes vai jaudas koeficienta noteikšanai:

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_r^2}, \quad \cos \varphi = \frac{I_a}{I}, \quad \sin \varphi = \frac{I_r}{I}.$$

5. Aktīvo jaudu  $P$  aprēķina ar 3.2. tabulas formulu (3.7), reaktīvo jaudu – ar (3.7a). Aprēķinā var izmantot arī strāvas aktīvo un reaktīvo komponenti.

$$P = UI \cos \varphi = UI_a.$$

### Atrisinājums

1. Pretestību trīsstūri pirmajam un otrajam zaram parādīti 3.20.b un 3.20.c attēlā. No tiem pēc vienādojumiem (3.8a) atrodam zaru pilnās pretestības un fāžu nobīdes:

$$Z_1 = 50 \, \Omega, \quad Z_2 = 100 \, \Omega, \quad \varphi_1 = -53^\circ, \quad \varphi_2 = 37^\circ.$$

Zaru strāvu efektīvās vērtības atrodam pēc Oma likuma virknes slēgumam (3.8):

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{100}{50} = 2 \, \text{A}, \quad I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{100}{100} = 1 \, \text{A}.$$

Trešajā zarā ir tikai kapacitīvs elements. Zara strāvas efektīvo vērtību un fāžu nobīdi nosaka šī elementa vienādojumi (3.4):

$$I_3 = \frac{U}{X_C} = \frac{100}{100} = 1 \, \text{A}, \quad \varphi_3 = -90^\circ.$$

2. Zīmējam vektoru diagrammu (3.21.a att.).

Diagrammu sākam zīmēt ar sprieguma  $U$  vektoru.

Strāvu vektoru virzienus nosaka fāžu nobīde ( $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ) katram zaram.

Pirmajā zarā fāžu nobīdes leņķis  $\varphi_1 = -53^\circ$  ir negatīvs (zaram ir kapacitīvs raksturs – strāva apsteidz fāzē spriegumu par  $53^\circ$ ), tāpēc strāvas  $I_1$  vektoru atliek slīpi uz augšu – tad leņķis  $\varphi_1$  (atcerēsimies, ka vektoru diagrammā leņķi atliek no strāvas vektora) tiešām būs negatīvs.

Otrā zara raksturs ir induktīvs ( $\varphi_2 = 37^\circ$ ), tāpēc strāvas  $I_2$  vektoru atliek slīpi uz leju.

Trešā zara strāva kapacitīvajā elementā apsteidz fāzē spriegumu  $U$  ( $\varphi_3 = -90^\circ$ ), tāpēc tās vektoru atliek uz augšu.

Avota strāvu  $I$  atrod, **vektorus** saskaitot saskaņā ar strāvu vienādojumu (3.6):

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3.$$

Saskaitīšanas rezultāts redzams 3.21.c attēla diagrammā.

3. Nosakām zaru strāvu aktīvās komponentes:

$$I_{1a} = I_1 \cos\varphi_1 = 2 \cdot 0,6 = 1,2 \text{ A}, \quad I_{2a} = I_2 \cos\varphi_2 = 1 \cdot 0,8 = 0,8 \text{ A}, \quad I_{3a} = 0 \text{ A}.$$

Nosakām zaru strāvu reaktīvās komponentes:

$$I_{1r} = I_1 \sin\varphi_1 = 2 \cdot (-0,8) = -1,6 \text{ A}, \quad I_{2r} = I_2 \sin\varphi_2 = 1 \cdot 0,6 = 0,6 \text{ A},$$

$$I_{3r} = I_3 \sin\varphi_3 = 1 \cdot (-1) = -1 \text{ A}.$$

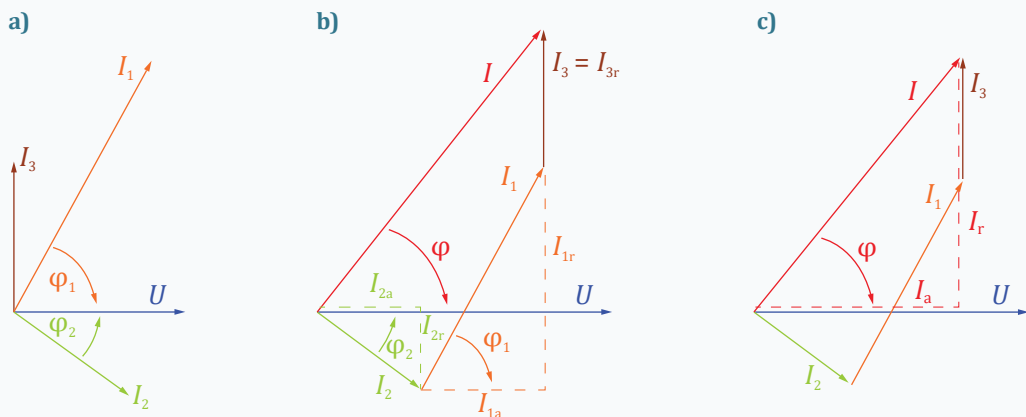
Zaru strāvu komponentes parādītas ar punktētām līnijām 3.21.b attēlā, bet avota strāvas komponentes – 3.21.c attēlā.

Avota strāvas aktīvā komponente:

$$I_a = I_{1a} + I_{2a} + I_{3a} = 1,2 + 0,8 + 0 = 2 \text{ A}.$$

Avota strāvas reaktīvā komponente:

$$I_r = I_{1r} + I_{2r} + I_{3r} = -1,6 + 0,6 - 1 = -2 \text{ A}.$$



**3.21. att.** Vektoru diagramma: sprieguma un zaru strāvu vektori (a), parādītas zaru strāvu komponentes (b), parādītas avota strāvas  $I$  komponentes (c).

Negatīva reaktīvās komponentes  $I_r$  zīme un arī negatīva fāžu nobīde  $\varphi$  rāda, ka strāva  $I$  apsteidz fāzē spriegumu  $U$ . Citiem vārdiem, šai ķēdei kopumā ir kapacitīvs raksturs.

4. Zinot strāvas  $I$  komponentes, varam atrast tās efektīvo vērtību un jaudas koeficientu:

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_r^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2,83 \text{ A}, \quad \cos\varphi = \frac{I_a}{I} = \frac{2}{2,82} = 0,707.$$

Atrodam arī fāžu nobīdes leņķi  $\varphi$  starp avota strāvu un spriegumu. Lai neklūdītos ar zīmi (plusa vai mīnusa), ieteicams no (3.8a) formulām izvēlēties arkssinusa (nevis arkkosinusa) funkciju:

$$\varphi = \arcsin(I_r / I) = \arcsin(-0,707) = -45^\circ.$$

5. Aprēķinām visas ķēdes patērēto aktīvo jaudu (3.7):

$$P = UI \cos\varphi = UI_a = 100 \cdot 2,82 \cdot 0,707 = 100 \cdot 2 = 200 \text{ W}.$$

Aprēķinām visas ķēdes reaktīvo jaudu (3.7a):

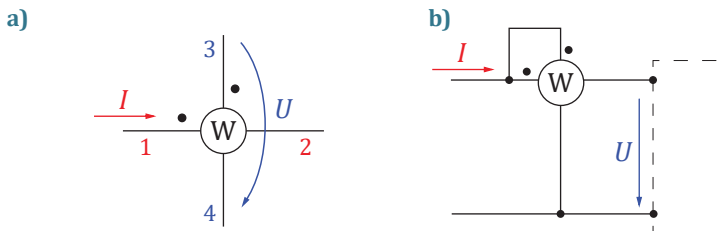
$$Q = UI \sin\varphi = UI_a = 100 \cdot 2,82 \cdot (-0,707) = 100 \cdot (-2) = -200 \text{ var}.$$

Negatīva reaktīvās jaudas  $Q$  vērtība nozīmē, ka ķēde kopumā patērē kapacitīva rakstura reaktīvo jaudu.

## Maiņstrāvas ķēžu piemēri

### Aktīvās jaudas mērīšana

Aktīvo jaudu  $P$  mērī ar vatmetru. Tā apzīmējums shēmā parādīts 3.22.a attēlā. Atšķirībā no ampērmetra vai voltmetra vatmetram ir četras pieslēgspailes, jo tam ir strāvas ķēde ar izvadiem 1 un 2 un sprieguma ķēde ar izvadiem 3 un 4. Lieto arī terminus “strāvas spole” un “sprieguma spole”, jo elektrodinamiskās sistēmas vatmetra darbība pamatojas uz divās vatmetra spolēs (nekustīgā strāvas spolē un kustīgā sprieguma spolē) plūstošu strāvu radītu magnētisko lauku mijiedarbību. Atšķirībā no ampērmetra un voltmetra vatmetram ir divi mērapjomi: strāvai un spriegumam. Aprēķinot vatmetra iedaļas vērtību, šos mērapjomus sareizina un izdala ar vatmetra skalas iedaļu skaitu.



3.22. att. Vatmetra spoļu polaritāte (a), patērētāja aktīvās jaudas mērīšana (b).

Vatmetra rādījums ir sprieguma un strāvas momentāno vērtību reizinājuma (t. i., momentānās jaudas  $p = ui$ ) vidējā vērtība. Atcerēsimies, ka līdzīgi definē arī aktīvo jaudu  $P$ . Tātad pareizi ieslēgts vatmetrs uzrādīs aktīvās jaudas  $P$  vērtību. Lai izmērītu kāda divpola patērēto vai ģenerēto aktīvo jaudu, abas vatmetra ķēdes jāpieslēdz **šī divpola strāvai un spriegumam**, turklāt ievērojot pareizu polaritāti.

Sprieguma un strāvas polaritāti, strādājot ar vatmetru, ievēro šādi. Vienu no sprieguma vai strāvas spoles izvadiem (“sākumu”) shēmā apzīmē ar punktu (uz vatmetra korpusa tas apzīmēts ar zvaigznīti pie attiecīgās spaiļes): piemēram, 3.22.a attēlā spoļu sākumi ir attiecīgi spaiļes 1 un 3. Tad pieņemtie pozitīvie sprieguma un strāvas virzieni vatmetra kēdēs skaitāmi no spaiļes, kas apzīmēta ar punktu.

Atcerēsimies, ka par patērētāju uzskata tādu divpolu, kura sprieguma un strāvas pieņemtie pozitīvie virzieni sakrīt. Tātad, lai izmērītu divpola **patērēto** aktīvo jaudu, vatmetra spoļu polaritāte jāizvēlas tā, kā parādīts 3.22.b attēlā.

Un otrādi: ja divpola sprieguma un strāvas pieņemtie pozitīvie virzieni shēmā nesakrīt, tad divpolu uzskata par ģeneratoru. Ja vajadzētu izmērīt shēmā parādītā divpola **ģenerēto** aktīvo jaudu, vienai no vatmetra ķēdēm (ne abām) būtu jāizmaina polaritāte, salīdzinot ar 3.22.b attēlā parādīto.

### Induktivitātes spoles parametru noteikšana

Reālai induktivitātes spolei atšķirībā no idealizēta induktīva elementa  $L$  ir arī vijumu aktīvā pretestība  $R$ . Tāpēc, strāvai plūstot reālā spolē ( $R, L$ ), tajā ir jaudas zudumi:  $P = RI^2 > 0$ .

Induktivitātes spoles apzīmējums parādīts 3.23.a attēlā. Aizvietošanas shēmās spoli aizstāj ar idealizētu elementu  $R$  un  $L$  virknes slēgumu (3.23.b att.). Tā pretestību trīsstūris redzams 3.23.c attēlā.

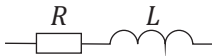
Eksperimentāli spoles parametrus nosaka, kā parādīts 3.24. attēlā. Ķēdē ieslēdz mērāparātus – ampērmetru, voltmetru un vatmetru – strāvas  $I$ , sprieguma  $U$  un aktīvās jaudas  $P$  mērīšanai. Shēmu pieslēdz maiņsprieguma avotam. Izmantojot mērījumu rezultātus, iespējams atrast divus lielumus pretestību trīsstūrī, piemēram, pilno pretestību un fāžu nobīdes leņķi  $\varphi$ :

$$Z = \frac{U}{I}, \quad \cos\varphi = \frac{P}{UI}.$$

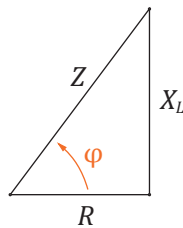
a)



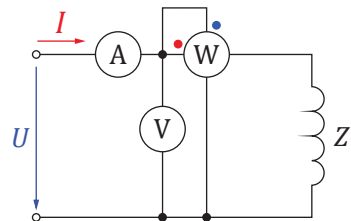
b)



c)



3.23. att. Spoles (a) aizvietošanas shēma (b) un pretestību trīsstūris (c).



3.24. att. Spoles parametru noteikšana

Līdz ar to pretestību trīsstūris ir pilnīgi noteikts, atliek aprēķināt pārējos parametrus:

$$R = Z \cos\varphi, \quad X_L = Z \sin\varphi.$$

Spoles induktivitātes  $L$  vērtību aprēķina, izmantojot induktīvās pretestības izteiksmi (3.3a):

$$X_L = \omega L = 2\pi fL.$$

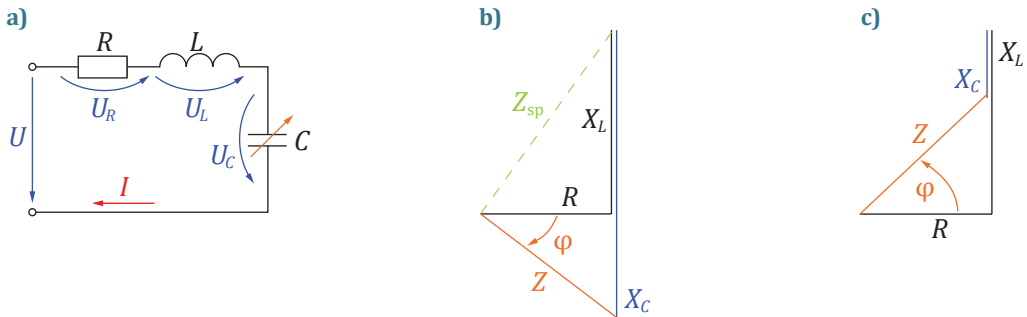
Spoles aktīvo pretestību  $R$  iespējams noteikt arī pēc jaudas formulas:  $R = P/I^2$ , bet induktīvo pretestību  $X_L$  – no spoles pretestību trīsstūra (3.23.c att.), zinot  $Z$  un  $R$ .

## Spriegumu rezonanse

Kā zināms, līdzsprieguma avotam pieslēgta ķēde ar virknē slēgtiem rezistīviem elementiem ir sprieguma dalītājs. Stacionārā režīmā neviens no spriegumiem te nepārsniedz avota sprieguma vērtību. Turpretī maiņstrāvas ķēdē, ja tajā ir virknē slēgti abu tipu reaktīvie elementi ( $L$  un  $C$ ), iespējami režīmi, kad spriegums kādā ķēdes daļā pārsniedz (reizēm pat ievērojami) avota spriegumu.

Lai izpētītu šo parādību, maiņsprieguma avotam  $U$  pievienota induktivitātes spole ( $R, L$ ) virknē ar kondensatoru bateriju (3.25.a att.). Ķēdē plūstošo strāvu  $I$ , virknes slēguma pilno pretestību  $Z$  un fāžu nobīdi  $\varphi$  nosaka formulas (3.8) un (3.8a), ko ilustrē arī pretestību trīsstūris (3.25.b att.):

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}.$$



3.25. att. Elementu  $R, L, C$  virknes slēgums: aizvietošanas shēma (a), pretestību trīsstūris (b, c).

Noskaidrosim, kā **kapacitātes  $C$  izmaiņa** iespaido strāvas  $I$  vērtību, spriegumus uz atsevišķiem shēmas elementiem un ķēdes jaudas koeficientu  $\cos \varphi$ . Ievērosim, ka kapacitīvā pretestība  $X_C$  ir apgriezti proporcionāla kondensatora kapacitātei (3.4a):  $X_C = 1 / (\omega C)$ .

1. Ja  $C = 0$ , tad kapacitīvā pretestība  $X_C = \infty$ , arī ķēdes pilnā pretestība  $Z = \infty$ , un strāva ķēdē neplūst:  $I = 0$ .
2. Palielinot kapacitātes  $C$  vērtību,  $X_C$  samazinās, sākumā vēl palikdama mazāka par induktīvo pretestību  $X_L$ . Pretestību trīsstūris (3.25.b att.) rāda, ka  $\varphi < 0^\circ$  un ķēdei ir kapacitīvs raksturs.
3. Turpinot palielināt  $C$ ,  $X_C$  turpina samazināties. Īpašs ir režīms, kad reaktīvās pretestības ir vienādas:  $X_C = X_L$ .

Ķēdes pretestības  $Z$  vērtība tad ir vismazākā ( $Z = R$ ), arī pretestību trīsstūrī pilnā pretestība  $Z$  sakrīt ar  $R$  un  $\varphi = 0^\circ$ .

Šo situāciju sauc par **spriegumu rezonanses režīmu**, jo tad arī spriegumi uz ķēdes reaktīvajiem elementiem ir vienādi:

$$U_C = X_C I = X_L I = U_L.$$

Tātad spriegumu rezonanses režīmu raksturo šādas **pazīmes**: pilnās pretestības  $Z$  minimālā vērtība  $Z_{\text{rez}} = Z_{\text{min}} = R$  un strāvas  $I$  maksimālā vērtība

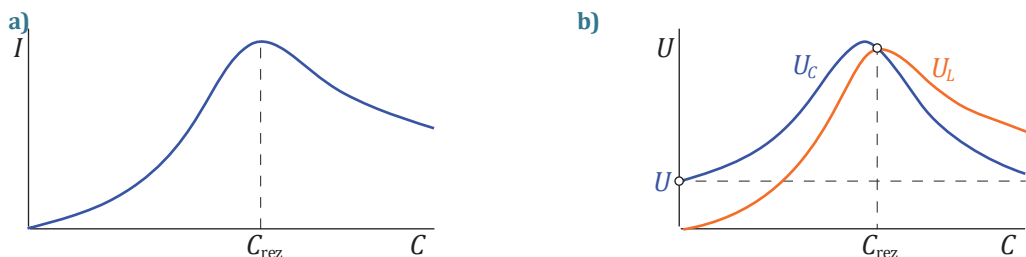
$I_{\text{rez}} = I_{\text{max}} = U/Z_{\text{rez}} = U/R$ , bet strāva sakrīt fāzē ar spriegumu, un jaudas koeficienta vērtība ir maksimāli iespējamā:  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\cos\varphi = 1$ .

4. Ja pēc rezonanses sasniegšanas vēl turpina palielināt  $C$ , kapacitīvā pretestība  $X_C$  kļūst mazāka par  $X_L$ . Tagad pretestību trīsstūrī (3.25.c att.)  $\varphi > 0^\circ$ , tātad ķēdei ir induktīvs raksturs.

Strāvas izmaiņa atkarībā no kapacitātes  $I = f(C)$  parādīta 3.26.a attēlā. Strāvas līkne maksimumu sasniedz rezonanses režīmā. Pēc rezonanses strāva  $I$  samazinās, asimptotiski tiecoties uz vērtību, ko nosaka spriegums  $U$  un spoles parametri  $R$  un  $X_L$ :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}.$$

Spriegumu  $U_C$  un  $U_L$  līknes parādītas 3.26.b att. Ja  $C = 0$  un ķēdē strāva neplūst, tad arī spriegumi uz elementiem  $R$  un  $L$  ir vienādi ar nulli:  $U_R = RI = 0$ ,  $U_L = X_L I = 0$ , tāpēc viss spriegums  $U$  pielikts kondensatoram:  $U_C = U$ . Spriegums  $U_L$  mainās, sākot no nulles, līdzīgi strāvas līknei (tāpat mainās arī spriegums  $U_R$ ). Rezonanses režīmā  $U_C = U_L$ .



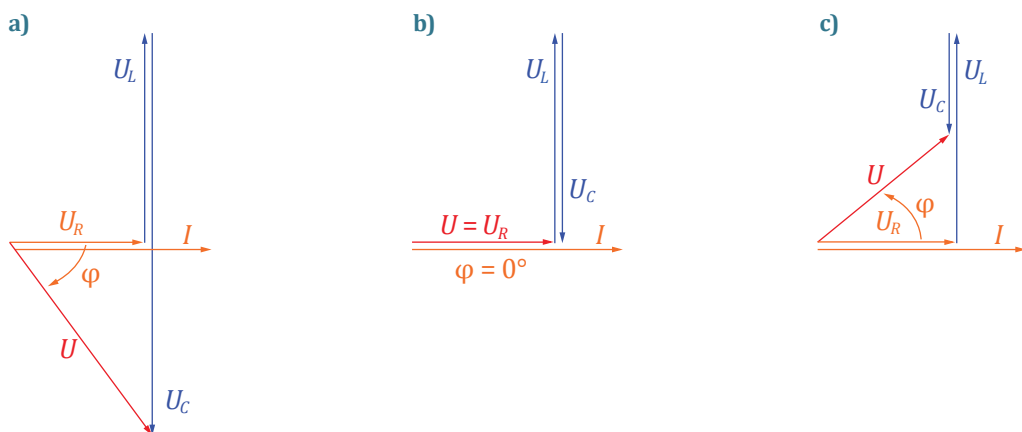
3.26. att. Strāvas grafiks (a), spriegumu  $U_C$  un  $U_L$  atkarība no kapacitātes (b).

Vektoru diagrammas parādītas 3.27. attēlā. Tās ir līdzīgas pretestību trīsstūriem 3.25. attēlā, jo visi ķēdes spriegumi ir proporcionāli pretestībām. Pirms rezonanses ķēdes raksturs ir kapacitīvs – strāva  $I$  apsteidz fāzē avota spriegumu  $U$ , turpretim pēc rezonanses raksturs ir induktīvs – strāva no sprieguma atpaliek fāzē.

Spriegumu rezonanse enerģētiskā visbiežāk ir nevēlama parādība, jo maiņstrāvas ķēdē režīmos, kas ir tuvu rezonansei, uz atsevišķiem ķēdes elementiem parādās spriegumi, kas var pat **pārsniegt avota spriegumu**. No spriegumu izteiksmes rezonanses režīmam

$$U_L = X_L I_{\text{rez}} = \frac{X_L}{R} U$$

redzams, ka **sevišķi bīstams** ir gadījums, ja induktīvā pretestība daudzkārt pārsniedz aktīvo pretestību ( $R \ll X_L$ ). Tad jāreķinās, ka rezonanses tuvumā spriegumi ķēdē **daudzkārt** pārsniegs avota sprieguma vērtību.



3.27. att. Vektoru diagrammas: pirms rezonances (a), rezonances režīmā (b), pēc rezonances (c).

Tas redzams arī 3.26.b grafikā – ar horizontālu līniju parādīts avota spriegums  $U$ , bet tuvu rezonansei spriegumi ievērojami pārsniedz tā vērtību.

Rezonances parādību izmanto radiotehnikā, kur atšķirībā no enerģētikas sastopamas visdažādākās frekvences. Izmantojot reaktīvo pretestību formulas (3.3a) un (3.4a) un rezonances noteikumu  $X_C = X_L$ , var iegūt rezonances frekvences formulu:

$$f_{\text{rez}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{LC}.$$

Izteiksme rāda, ka, mainot, piemēram, kapacitāti  $C$ , iespējams  $RLC$  kontūru noskaņot rezonansē dotajai frekvencei, tādējādi iegūstot vismazāko kontūra pretestības  $Z$  vērtību  $Z = R$ .

### Jaudas koeficienta uzlabošana

Rūpniecībā un transportā lietojamās iekārtās plašāk izplatīti ir aktīvi induktīva rakstura patērētāji, jo spoles (piemēram, elektrisko mašīnu un transformatoru tinumi) sastopamas daudz biežāk nekā kondensatori.

Saskaņā ar aktīvās jaudas formulu (3.7) strāvas  $I$  vērtība, kas nepieciešama jaudas  $P$  pārvadīšanai tīklā ar zināmu spriegumu  $U$ , ir atkarīga no jaudas koeficienta  $\cos\varphi$  vērtības:

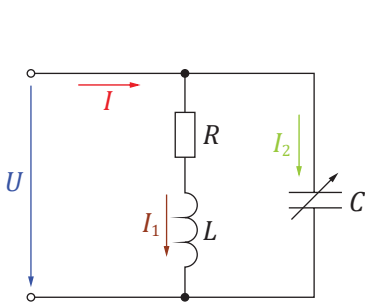
$$I = \frac{P}{U \cos\varphi}.$$

Aktīvi induktīvu patērētāju jaudas koeficients  $\cos\varphi < 1$ . Paaugstinot  $\cos\varphi$  vērtību, doto jaudu  $P$  patērētājiem varētu pievadīt ar mazāku strāvas patēriņu.

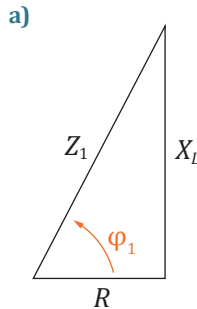
Viens no izplatītākajiem paņēmieniem jaudas koeficienta uzlabošanai ir šāds: aktīvi induktīvu patērētāju grupai paralēli pieslēdz kondensatoru bateriju ar regulējamu kapacitāti  $C$ , kā tas parādīts aizvietošanas shēmā 3.28. attēlā.

Aplūkosim vispirms shēmas darbību gadījumā, ja kondensatori nav pieslēgti ( $C = 0$ ). Tad  $I_2 = 0$  un pirmajā zarā plūst visa avota strāva ( $I_1 = I$ ):

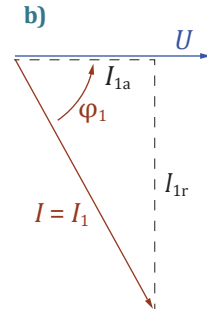
$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}.$$



3.28. att. Shēma  $\cos\varphi$  uzlabošanai.



3.29. att. Pirmā zara pretestību trīsstūris (a) un vektoru diagramma (b).



Pirmā zara pretestību trīsstūris (3.29.a att.) nosaka, ka strāva  $I_1$  atpaliks fāzē no sprieguma  $U$  par leņķi  $\varphi_1$ . Attēlojam to vektoru diagrammā (3.29.b att.). Diagrammā parādītas arī strāvas  $I_1$  vektora komponentes – aktīvā un reaktīvā. **Uzmanību!** Šeit mēdz aizmirst, ka visā pirmajā zarā plūst strāva  $I_1$ , un strāvas  $I_{1a}$  un  $I_{1r}$  uzskata par elementos  $R$  un  $L$  plūstošām strāvas. Īstenībā strāvu komponentes ir tikai aprēķina lielumi un nepārstāv nekādas reālas strāvas shēmā.

**Palielinot kapacitāti  $C$** , pieaug tai tieši proporcionālā strāvas  $I_2$  vērtība. Tas izriet no vienādojuma (3.4) un (3.4a):

$$I_2 = \frac{U_c}{X_c} = \omega CU.$$

Pirmā zara strāvas  $I_1$  vērtība, protams, nemainās, to nosaka spriegums  $U$  un nemainīga pretestība  $Z_1$  vienādojumā (3.8). Nemainās arī šīs strāvas fāžu nobīde  $\varphi_1$  attiecībā pret spriegumu. Strāva  $I_2$ , kas apsteidz fāzē spriegumu par  $90^\circ$ , ietekmē avota strāvu  $I$  un fāžu nobīdi  $\varphi$ :  $\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$ .

**Kamēr  $C$  vērtība ir maza** (3.30.a att. – strāvas  $I_2$  vektora galapunkts atrodas punktā 1 vai 2), ķēdes raksturs vēl ir induktīvs ( $\varphi > 0^\circ$ ). Pievērsiet uzmanību tam, ka, strāvai  $I_2$  pieaugot, avota strāvas  $I$  vektora modulis nevis pieaug, bet samazinās! Samazinās arī fāžu nobīdes leņķis  $\varphi$ , tātad  $\cos\varphi$  pieaug.

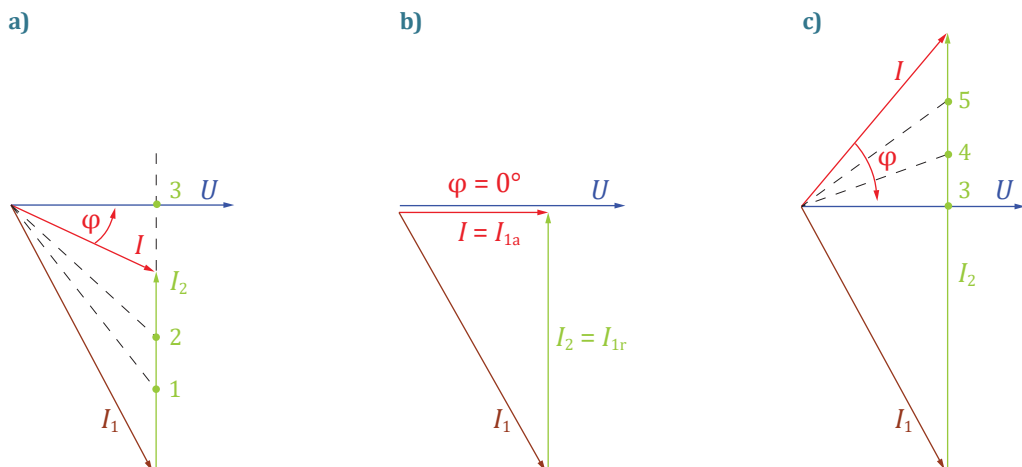
Režīmu, kurā strāvas  $I$  vērtība ir vismazākā, sauc par **strāvu rezonanses** režīmu. 3.30.a attēla vektoru diagrammā redzams, ka rezonanse iestāsies, kad strāvas  $I_2$  vektora galapunkts atradīsies punktā 3.

Kādam jābūt strāvas  $I_2$  vērtībai, lai iegūtu šādu režīmu? Atbilde redzama 3.30.b attēlā: vienādam ar pirmā zara strāvas reaktīvo komponenti  $I_{1r}$ :

$$I_2 = I_{1r}.$$



Tas arī ir strāvu rezonanses noteikums. Tātad rezonanses iegūšanai aktīvi induktīva patērētāja reaktīvo komponenti (ar induktīvu raksturu) kompensē ar tikpat lielu kapacitīva rakstura strāvu otrā zarā.



3.30. att. Vektoru diagrammas: pirms rezonanses (a), rezonanses režīmā (b), pēc rezonanses (c).

Strāvu rezonanses režīma pazīmes redzamas vektoru diagrammā 3.30.b attēlā:

- 1) strāvas  $I$  vērtība ir minimāla un vienāda ar pirmā zara strāvas aktīvo komponenti;
- 2) strāvas un sprieguma sinusoidas sakrīt fāzē, tātad jaudas koeficientam ir maksimālā vērtība:

$$I_{\min} = I_{1a}, \quad \varphi = 0^\circ, \quad \cos\varphi = 1.$$

**Turpinot palielināt kapacitāti  $C$  pēc rezonanses režīma, izmaiņas redzamas 3.30.c attēlā:** ķēdes raksturs kļūst kapacitīvs ( $\varphi < 0^\circ$ ). Strāvai  $I_2$  palielinoties (punkti 4 un 5), kopējās strāvas  $I$  vektora garums pieaug, fāžu nobīdes leņķa  $\varphi$  absolūtā vērtība arī pieaug, bet jaudas koeficients  $\cos\varphi$  samazinās.

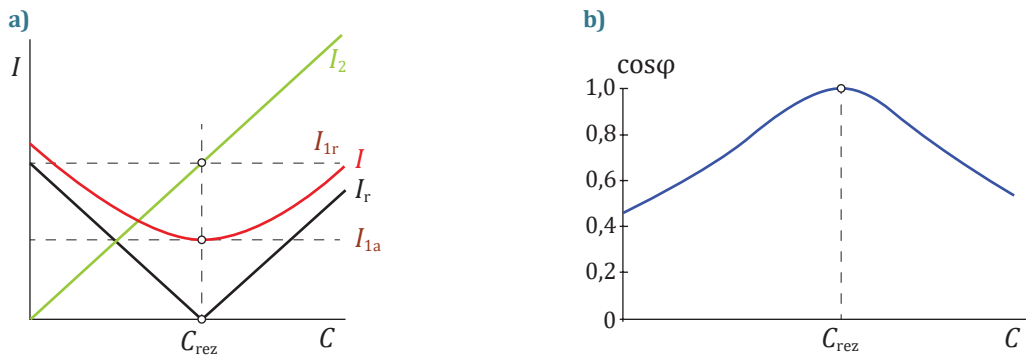
Mainot  $C$  vērtību, kopējās strāvas aktīvā komponente  $I_a$  paliek nemainīga un vienāda ar pirmā zara strāvas aktīvo komponenti  $I_{1a}$ . Arī šī izteiksme apstiprina, ka pie jebkuras  $C$  vērtības shēma patērē vienu un to pašu aktīvo jaudu  $P$ :

$$P = UI \cos\varphi = UI_a = UI_{1a} = \text{const.}$$

Tas arī saprotams, jo shēmā vienīgais aktīvās jaudas patērētājs ir elements  $R$  – reaktīvie elementi  $L$  un  $C$  aktīvo jaudu nepatērē.

Strāvu grafiki parādīti 3.31.a attēlā. Palielinot kapacitāti  $C$ , strāva  $I_2$  pieaug lineāri. No avota saņemtās strāvas  $I$  aktīvā komponente nemainās – tā ir tāda pati kā pirmā zara aktīvā komponente  $I_{1a}$ , bet reaktīvā komponente  $I_r$  (grafikā parādīta tās absolūtā vērtība, neievērojot raksturu) rezonanses režīmā ir vienāda ar nulli – tāpēc rezonanses

režīmā ķēdes patērētās strāvas  $I$  vērtība ir vismazākā. Jaudas koeficienta grafiks redzams 3.31.b attēlā. Pareizi izvēloties kapacitātes  $C$  vērtību, iespējams iegūt režīmus, kas tuvi strāvu rezonanses režīmam. Jaudas koeficienta vērtība tad ir tuva maksimāli iespējamai ( $\cos\varphi = 1$ ).



3.31. att. Strāvu (a) un jaudas koeficienta (b) atkarība no pieslēgtās kapacitātes  $C$  vērtības.



## levietojiet vispiemērotākos vārdus

1. Maiņstrāvas ķēdē spriegumi un strāvas ir ..... funkcijas.
2. Maiņstrāvas ..... vērtība ir 1,41 reizes lielāka par ..... vērtību.
3. Sinusoīdu fāžu starpību sauc par .....
4. Kondensatora ..... apsteidz fāzē ..... par .....
5. .... trīsstūri zīmē tikai elementu ..... slēgumam.
6. Pretestību trīsstūri izmanto, lai aprēķinātu ..... un .....
7.  $\cos \varphi$  sauc par .....
8. Lai aprēķinātu kopējo strāvu maiņstrāvas ķēdei ar paralēliem zariem, jāzīmē .....
9. Momentānās jaudas vidējo vērtību sauc par ..... jaudu.
10. Vektoru diagrammu zīmēšanai izmanto trīs elementu ..... un spriegumu vai ..... vienādojumus.
11. Leņķi  $\varphi$  vektoru diagrammās atliek no ..... vektora līdz ..... vektoram.
12. Aktīvā jauda  $P$  ir momentānās jaudas  $p$  .....
13. Ar vatmetru mērī ..... jaudu.
14. Topogrāfiskajā diagrammā neparāda ..... vektorus.
15. Induktivitātes spoles parametru noteikšanai nepieciešami mēraparāti: ampērmetrs, voltmeters un .....
16. Spriegumu rezonanse novērojama maiņstrāvas ķēdē ar rezistora, ..... un indukcijas spoles ..... slēgumu.
17. Pieslēdzot paralēli aktīvi induktīvam patērētājam ....., uzlabo ķēdes .....

## Salīdziniet atbildes

1) sinusoidālais laika; 2) amplitūdas, efektīvo; 3) fāžu nobīdi; 4) strāva, spriegumu,  $90^\circ$ ; 5) pretestību, virknes; 6) pilno pretestību, fāžu nobīdi; 7) jaudas koeficientu; 8) vektoru diagramma; 9) aktīvo; 10) vektoru diagrammas, strāvu; 11) strāvas, sprieguma; 12) vidējā vērtība; 13) aktīvo; 14) strāvu; 15) vatmetrs; 16) kondensatora, virknes; 17) kondensatoru, jaudas koeficientu.

## 4. NODAĻA

### Simboliskā metode

Atšķirībā no vektoru diagrammu metodes simbolisko metodi var lietot jebkuras sarežģītības pakāpes maiņstrāvas ķēdes aprēķināšanai. Simboliskās metodes pamatā ir visu aprēķinā lietojamo lielumu – EDS, spriegumu, strāvu, pretestību un jaudu – attēlošana ar **kompleksiem lielumiem**. Līdz ar to aprēķina tehnika gan kļūst sarežģītāka, taču aprēķina **metodika** ievērojami vienkāršojas – maiņstrāvas ķēdes var aprēķināt ar 2. nodaļā aplūkotajām līdzstrāvas ķēžu aprēķina metodēm.

Formulu iegūšanai vairs nav jāzīmē vektoru diagrammas – gluži otrādi, risinājuma gaitā iegūtos rezultātus, proti, kompleksos skaitļus, attēlojot **komplekso skaitļu plaknē**, veidojas vektoru diagramma, kuru iespējams izmantot rezultātu pareizības kontrolei. Tā kā, risinot jebkuru uzdevumu, svarīgi ir pārbaudīt katru starprezultātu, tad sekmīgai simboliskās metodes lietošanai vēlams pārzināt arī vektoru diagrammu metodi.

---

Šajā nodaļā jūs iepazīsities ar

- komplekso skaitļu plakni, komplekso lielumu formām un darbībām ar tiem,
- sprieguma un strāvas attēlošanu ar kompleksajiem skaitļiem,
- elementa vai virknes slēguma komplekso pretestību,
- maiņstrāvas ķēžu formulām kompleksajā formā,
- simboliskās metodes lietošanas principiem un maiņstrāvas ķēdes aprēķina piemēriem.

---

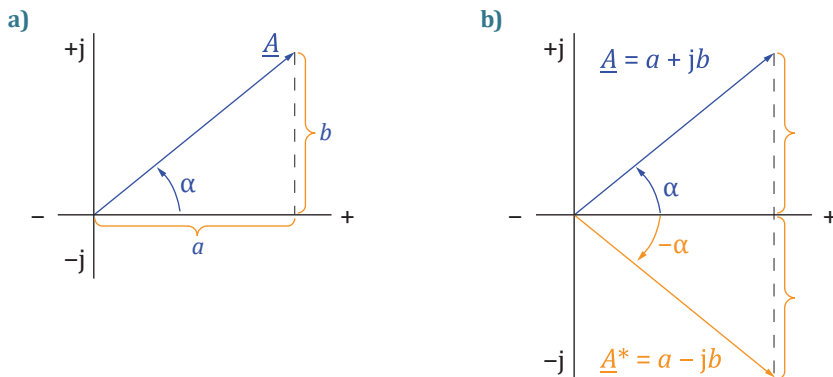
#### Komplekso skaitļu plakne un darbības ar kompleksajiem skaitļiem

Komplekso skaitļu (turpmāk arī kompleksajā) plaknē ir divas savstarpēji perpendikulāras koordinātu ass: horizontāla reālā ass un vertikāla imaginārā ass. Imagināro vienību (matemātikā  $i = \sqrt{-1}$ ) elektrotehnikā un dažās citās tehnikas disciplīnās pieņemts apzīmēt ar “j”. Komplekso skaitli var uzskatīt par kompleksajā plaknē novietota vektora (ar sākumu koordinātu sākumpunktā) analītisku pierakstu. 4.1. attēlā parādīta

kompleksā plakne, kurā attēlots kompleksais skaitlis  $\underline{A}$ . Šī kompleksā skaitļa trīs pieraksta formas (algebriskā, trigonometriskā un eksponenciālā) redzamas šajā izteiksmē:

$$\underline{A} = a + jb = A(\cos\alpha + j\sin\alpha) = Ae^{j\alpha}.$$

algebriskā forma    trigonometriskā forma    eksponenciālā forma



**4.1. att.** Kompleksais skaitlis  $\underline{A}$  kompleksajā plaknē (a),  $\underline{A}$  kompleksi saistītais skaitlis  $\underline{A}^*$  (b).

Apzīmējumi kompleksā skaitļa izteiksmē un 4.1. attēlā:

$\underline{A}$  – kompleksais skaitlis,

$a$  – kompleksā skaitļa reālā daļa; to pieraksta šādi:  $\text{Re}(\underline{A}) = a$ ,

$b$  – kompleksā skaitļa imaginārā daļa; to pieraksta šādi:  $\text{Im}(\underline{A}) = b$ ,

$A$  – kompleksā skaitļa modulis,

$\alpha$  – kompleksā skaitļa arguments; to pieraksta šādi:  $\arg(\underline{A}) = \alpha$ ,

$e$  – naturālā logaritma bāze (protams, ne EDS),  $e \approx 2,72$ .

4.1.b attēla zīmējums ilustrē jēdzienu “kompleksi saistītais skaitlis”. Kompleksā skaitļa  $\underline{A}$  kompleksi saistīto skaitli  $\underline{A}^*$  iegūst, skaitļa  $\underline{A}$  imaginārās daļas zīmi (vai eksponenciālajā formā – argumenta  $\alpha$  zīmi) nomainot uz pretējo.

Komplekso skaitļu **algebriskā forma** ir visai ērta to saskaitīšanai vai atņemšanai. Minētās darbības izpilda atsevišķi ar abu lielumu reālajām daļām un imaginārajām daļām, piemēram:

$$(1 + j2) - (3 + j4) = (1 - 3) + j(2 - 4) = -2 - j2.$$

Algebrisko formu var lietot, arī izpildot reizināšanu vai dalīšanu, piemēram:

$$(1 + j2)(3 + j4) = 1 \cdot 3 + j^2 \cdot 2 \cdot 4 + j2 \cdot 3 + j1 \cdot 4 = (3 - 8) + j(6 + 4) = -5 + j10.$$

Ja komplekso skaitļu algebrisko formu izmanto dalīšanai, tad lieto šādu paņēmieni, lai atbrīvotos no imaginārās daļas saucējā: izteiksmes saucēju un skaitītāju **reizina ar saucēja kompleksi saistīto skaitli**:

$$\frac{1}{1 + j2} = \frac{1 - j2}{(1 + j2)(1 - j2)} = \frac{1 - j2}{1 + 4} = 0,2 - j0,4.$$

Komplekso skaitļu **eksponenciālā forma** ir ērta to reizināšanai vai dalīšanai:

$$10e^{j30^\circ} \cdot 5e^{j45^\circ} = (10 \cdot 5)e^{j(30^\circ + 45^\circ)} = 50e^{j75^\circ},$$

$$10e^{j30^\circ} : 5e^{j45^\circ} = (10 : 5)e^{j(30^\circ - 45^\circ)} = 2e^{-j15^\circ}.$$

Ievērojiet, ka, **pareizinot ar  $e^{j\alpha}$** , kompleksā skaitļa arguments pieaug par leņķi  $\alpha$  – tas nozīmē, ka kompleksajam skaitlim atbilstošais vektors tiek **pagriezts par leņķi  $\alpha$**  pozitīvajā virzienā (t. i., pretēji pulksteņa rādītāja kustībai). Šo novērojumu ieteicams lietot, lai pārbaudītu reizināšanas vai dalīšanas rezultāta pareizību. Piemēram, pareizināt ar  $(-2 + j2)$ , t. i., ar komplekso skaitli, kas atrodas II kvadrantā ar argumentu  $135^\circ$ , nozīmē pagriezt kompleksajā plaknē novietotu vektoru par  $135^\circ$  pozitīvajā virzienā.

Komplekso skaitļu trigonometrisko formu lieto, lai pārveidotu algebrisko formu eksponenciālajā vai otrādi. Lai pārietu no eksponenciālās formas uz algebrisko, kompleksā lieluma reālo un imagināro daļu atrod, sareizinot moduli  $A$  ar argumenta  $\alpha$  kosinusu vai sinusu:

$$a = \operatorname{Re}(A) = A \cos \alpha, \quad b = \operatorname{Im}(A) = A \sin \alpha.$$

Lai pārietu no algebriskās formas uz trigonometrisko, formulas moduļa  $A$  un leņķa argumenta  $\alpha$  aprēķināšanai iegūst no taisnleņķa trijstūra, kura katetes ir  $a, b$  un hipotenūza ir  $A$  (4.1. att.), piemēram:

$$A = \sqrt{\operatorname{Re}^2(A) + \operatorname{Im}^2(A)} = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{vai} \quad \alpha = \operatorname{arccos}\left(\frac{a}{A}\right).$$

Pēdējās divas formulas, lietojot vienkāršākos kalkulatorus, dod tikai argumenta  $\alpha$  t. s. galveno vērtību robežās no  $-90^\circ$  līdz  $+90^\circ$ . Ja kompleksa lieluma reālā daļa  $a$  ir negatīva, tad tas acīmredzot atrodas kompleksās plaknes II vai III kvadrantā, un iegūtajai  $\alpha$  vērtībai jāpieskaita  $180^\circ$ . Tāpēc, nosakot argumentu  $\alpha$ , vērtējiet arī kompleksā lieluma novietojumu kompleksajā plaknē.

## Sinusoidāla sprieguma (strāvas, EDS) attēlošana kompleksajā plaknē

Atcerēsimies, kā sinusoidālu spriegumu (strāvu) aizstāj ar vektoru: sinusoīdas efektīvajai vērtībai atbilst vektora garums, bet sinusoīdas sākumfāze nosaka vektora virzienu. Simboliskā metode izmanto šo pašu principu, tikai vektoru zīmē no **kompleksās plaknes** koordinātu sākuma un apraksta ar komplekso skaitli. Kompleksā sprieguma, strāvas vai EDS moduli nosaka efektīvā vērtība  $U, I$  vai  $E$ , bet argumentu – sākumfāze  $\alpha$ . Komplekso spriegumu, strāvu vai EDS pieņemts apzīmēt ar attiecīgo lielo burtu, to pasvītrojot, piemēram:  $\underline{U}, \underline{I}, \underline{E}$ .

### 4.1. piemērs

Doti elektriskie lielumi:  $u = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$ ,  $i = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ A}$ .  
Uzrakstīt attēlojošo komplekso lielumu  $\underline{U}, \underline{I}$  izteiksmes.

## Atrisinājums

$$\underline{U} = 10e^{j30^\circ} = 10(\cos 30^\circ + j\sin 30^\circ) = (8,66 + j5) \text{ V,}$$

$$\underline{I} = 5e^{j90^\circ} = 5(\cos 90^\circ + j\sin 90^\circ) = 0 + j5 = j5 \text{ A.}$$

## Elementu virknes slēguma kompleksā pretestība

Līdzīgi tam, kā sinusoidāli elektriskie lielumi ( $u$  vai  $i$ ) kompleksā formā ( $\underline{U}$  vai  $\underline{I}$ ) ir kompleksajā plaknē novietoti vektori, tā arī kompleksā pretestība būtībā ir **kompleksajā plaknē novietots pretestību trīsstūris**. Atcerēsimies, kā zīmē pretestību trīsstūri (3.9.c att.): horizontāli pa labi atliek nogriežni, kas attēlo aktīvo pretestību  $R$ , tā galapunktā uz augšu – induktīvo pretestību  $X_L$ , no tā galapunkta uz leju – kapacitīvo pretestību  $X_C$ .

Ja zīmējumu veido kompleksajā plaknē, tad uzzīmētā trīsstūra hipotenūza ir kompleksā pilnā pretestība  $\underline{Z}$ . No tā, ka horizontālās (reālās) ass virzienā atlikta aktīvā pretestība  $R$ , vertikālās (imaginārās) ass virzienā – reaktīvā pretestība  $X = X_L - X_C$ , bet fāžu nobīdes leņķis  $\varphi$  ir kompleksās pretestības  $\underline{Z}$  arguments, izriet formulas:

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = Z(\cos \varphi + j\sin \varphi) = Ze^{j\varphi}.$$

Kompleksās pretestības  $\underline{Z}$  formula attiecināma tikai uz shēmas zaru, t. i., **atsevišķu elementu** vai elementu **virknes slēgumu**. Kompleksās pretestības moduļa  $Z$  vērtība ir vienāda ar virknes slēguma pilno pretestību (arī to apzīmējumi sakrīt). Aizvietošanas shēmā ar kompleksajām pretestībām to izteiksmes atrod pēc formulas:

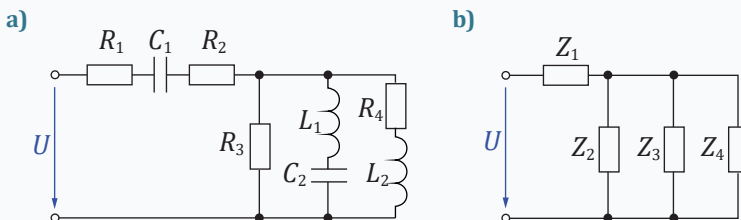
$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C). \quad (4.0)$$

Lietojot simbolisko metodi, kompleksā pretestība ir vienīgais pretestības tips, tāpēc shēmā to attēlo ar aktīvās pretestības  $R$  grafisko apzīmējumu.

## 4.2. piemērs

Sagatavot 4.2.a attēlā parādīto shēmu aprēķinam ar simbolisko metodi. Uzrakstīt komplekso pretestību izteiksmes.

Shēmas parametri:  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10 \Omega$ ,  $X_{L1} = X_{L2} = 12 \Omega$ ,  $X_{C1} = X_{C2} = 5 \Omega$ .



4.2. att. Aprēķināmā shēma (a), aizvietošanas shēma ar kompleksajām pretestībām (b).

### Atrisinājums

Dotajā shēmā ir četras elementu grupas ar virknes slēgumu vai vienu atsevišķu elementu: 1)  $R_1, C_1$  un  $R_2$ ; 2)  $R_3$ ; 3)  $C_2$  un  $L_1$ ; 4)  $L_2$  un  $R_4$ . Tāpēc aizvietošanas shēmā (4.2.b att.) ir četras kompleksās pretestības, kuru vērtības:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + R_2 - jX_{C1} = 10 + 10 - j5 = (20 - j5) \Omega,$$

$$\underline{Z}_2 = R_3 = 10 \Omega,$$

$$\underline{Z}_3 = jX_{L1} - jX_{C2} = j12 - j5 = j7 \Omega,$$

$$\underline{Z}_4 = R_4 + jX_{L2} = (10 + j12) \Omega.$$

### Aizvietošanas shēmu vienādojumi kompleksā formā

Pēc tam, kad aizvietošanas shēma ar kompleksajām pretestībām ir izveidota un dotie spriegumi vai EDS aizstāti ar kompleksiem lielumiem, maiņstrāvas ķēdi aprēķina ar tām pašām metodēm kā līdzstrāvas ķēdi. Šādu iespēju nosaka apstākļi, ka elementu tipu skaits un pamatvienādojumu struktūra ir tāda pati kā līdzstrāvas ķēdē (4.1. tab.). Turpmāk tekstā šīs formulas komentētas.

4.1. tabula

#### Maiņstrāvas ķēdes pamatformulas kompleksā formā

Vienādojumi	Līdzstrāvas ķēdē	Simboliskā metode	
Elementu vienādojumi	$U = -E$	$\underline{U} = -\underline{E}$	(2.1), (4.1)
	$U = RI$	$\underline{U} = \underline{Z}I$	(2.2), (4.2)
Spriegumu un strāvu vienādojumi	$U_{13} = U_{12} + U_{23}$	$\underline{U}_{13} = \underline{U}_{12} + \underline{U}_{23}$	(2.5), (4.5)
	$\sum E = \sum \pm RI$	$\sum \pm \underline{E} = \sum \pm \underline{Z}I$	(2.5a), (4.5a)
	$\sum I = 0$	$\sum \pm \underline{I} = 0$	(2.6), (4.6)
Divpola jauda	$P = UI$	$\underline{S} = \underline{U}I^* = P \pm jQ$	(2.7), (4.7)

### Elementu vienādojumi

Simboliskā metode samazina elementu tipu skaitu aizvietošanas shēmā – tāpat kā līdzstrāvas gadījumā tagad arī maiņstrāvas ķēdē ir tikai divi elementu tipi: kompleksais EDS  $\underline{E}$  un kompleksā pretestība  $\underline{Z}$ .

**Elementa  $E$  vienādojums** ir tāds pats kā vektoru diagrammu metodē, tikai vektorus aizstāj kompleksie lielumi:

$$\underline{U} = -\underline{E}. \quad (4.1)$$

Visus pretestību tipus ( $R, X_L$  un  $X_C$ ), kā arī elementu **virknes slēguma** pilno pretestību  $Z$  aizstāj viens elements – kompleksā pretestība  $\underline{Z}$ . **Kompleksās pretestības vienādojumam** ir Oma likuma forma:

$$\underline{U} = \underline{Z}I. \quad (4.2)$$



Salīdzinot ar vektoru diagrammu metodi, ieguvums ir acīmredzams: viens pats vienādojums (4.2) aizstāj veselas astoņas sakarības (četras Oma likuma izteiksmes un četras izteiksmes, kas parāda fāžu nobīdi katram elementam un virknes slēgumam).

Pierādīt vienādojuma (4.2) pareizību var šādi. Pieņemsim, ka divpolam pielikts sinusoidāls spriegums  $u$ , tajā plūst strāva  $i$  un fāžu nobīde ir  $\varphi$ :

$$u = U_m \sin(\omega t + \alpha), \quad i = I_m \sin(\omega t + \alpha - \varphi).$$

Attēlosim divpola spriegumu un strāvu ar kompleksiem lielumiem. Eksponenciālā forma izvēlēta, zinot, ka tā ir vispiemērotākā, lai veiktu komplekso lielumu dalīšanu.

$$\underline{U} = U e^{j\alpha}, \quad \underline{I} = I e^{j(\alpha - \varphi)}.$$

Izdalot komplekso spriegumu ar komplekso strāvu, tiešām iegūstam divpola komplekso pretestību:

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\alpha}}{I e^{j(\alpha - \varphi)}} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = Z e^{j\varphi} = \underline{Z}.$$

## Spriegumu un strāvu vienādojumi

Atcerēsimies, ka vektoru diagrammu metode ļauj shēmas struktūras vienādojumos (1.5) un (1.6) spriegumu (strāvu) sinusoidu momentāno vērtību vietā summēt attēlojošos vektorus. Līdzīgi tam, lietojot simbolisko metodi, sinusoidu vietā saskaita **kompleksos** spriegumus (strāvas). Piemēram, **spriegumu vienādojums**:

$$\underline{U}_{13} = \underline{U}_{12} + \underline{U}_{23}, \quad (4.5)$$

kur 1, 2 un 3 – jebkuru trīs shēmas punktu apzīmējumi.

**Strāvu vienādojums** (Kirhofa pirmais likums) kompleksā formā:

$$\sum \pm \underline{I} = 0. \quad (4.6)$$

To formulē līdzīgi visiem aplūkotajiem strāvu vienādojumiem: komplekso strāvu algebriskā summa shēmas mezglā ir vienāda ar nulli. "Algebriskā summa" nozīmē: ja strāvas bultiņa **shēmā** (tā norāda strāvas pieņemto pozitīvo virzienu) vērsta attiecīgā mezgla virzienā, tad to ievieto vienādojumā, teiksim, ar plusa zīmi, bet, ja tā ir vērsta prom no mezgla, – ar pretējo zīmi.

Tā kā simboliskā metode aplūko tikai divus elementu tipus ( $\underline{E}$  un  $\underline{Z}$ ), tad tāpat kā līdzstrāvas ķēdē iespējams korekti formulēt arī **Kirhofa otrā likuma** izteiksmi kompleksā formā:

$$\sum \pm \underline{E} = \sum \pm \underline{ZI}. \quad (4.5a)$$

Tas nozīmē: noslēgtā kontūrā komplekso EDS algebriskā summa vienāda ar komplekso sprieguma kritumu ( $\underline{ZI}$ ) algebrisko summu. "Algebriskā summa" jāsaprot šādi:

strāva (vai EDS) vienādojumā ir ar plusa zīmi, ja šīs strāvas (vai EDS) pieņemtais pozitīvais virziens sakrīt ar pieņemto kontūra apejas virzienu.

## Divpola kompleksā jauda

Kompleksā jauda  $\underline{S}$  ir komplekss lielums, kura reālā daļa ir aktīvā jauda  $P$ , bet imaginārā daļa – reaktīvā jauda  $Q$ .

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = P \pm jQ. \quad (4.7)$$

Formulā kompleksais spriegums  $\underline{U}$  jāreizina nevis ar komplekso strāvu  $\underline{I}$ , bet ar tās kompleksi saistīto lielumu  $\underline{I}^*$ . Pārlicināsimies par rezultāta pareizību. Pieņemsim, ka divpola sprieguma  $u$  sākumfāze ir  $\alpha$  un fāžu nobīde attiecībā pret strāvu ir  $\varphi$ . Tad strāvas  $i$  sākumfāze ir  $(\alpha - \varphi)$ , kas nozīmē, ka strāvas kompleksi saistītā lieluma  $\underline{I}^*$  arguments ir  $(\varphi - \alpha)$ . Minēto lielumu izteiksmes kompleksā formā:

$$\underline{U} = Ue^{j\alpha}; \underline{I} = Ie^{j(\alpha-\varphi)}; \underline{I}^* = Ie^{j(\varphi-\alpha)}.$$

Rezinājumu (4.7) no eksponenciālās formas pārveidojam trigonometriskajā:

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = Ue^{j\alpha}Ie^{j(\varphi-\alpha)} = UIe^{j\varphi} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi.$$

Tātad kompleksās jaudas  $\underline{S}$  reālā daļa ir divpola aktīvā jauda  $P = UI\cos\varphi$  (3.7), bet imaginārā daļa – reaktīvā jauda  $Q = UI\sin\varphi$  (3.7a). Ja divpols ir induktīva rakstura ( $\varphi > 0^\circ$ ), tad kompleksās jaudas imaginārā daļa ir pozitīva, bet, ja divpolam ir kapacitīvs raksturs, – negatīva.

Redzam, ka arī te simboliskajai metodei ir zināmas priekšrocības, salīdzinot ar vektoru diagrammu metodi: aktīvo un reaktīvo jaudu var aprēķināt vienā paņēmienā.

## Ekvivalento pārveidojumu formulas

Salīdzinot 4.1. tabulas vienādojumus simboliskā formā ar līdzstrāvas ķēdes vienādojumiem, redzēsīm, ka tie ir gandrīz analogiski. Līdzīgas ir arī pretestību ekvivalento pārveidojumu formulas. Pretestību virknes un paralēlslēguma ekvivalentas pārveidošanas formulās atliek nomainīt pretestības  $R$  ar kompleksām pretestībām  $\underline{Z}$ , kā parādīts:

*virtnes slēgumam:*

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots, \quad (4.8)$$

*paralēlslēgumam:*

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots \quad (4.9)$$

**Uzmanību!** Formula (4.9) paralēlslēguma pārveidošanai ir spēkā **tikai kompleksām pretestībām**  $\underline{Z}$  (nekādā gadījumā to moduļiem  $Z$ ). Atcerieties, ka iepriekšējā

nodaļā aplūkotā vektoru diagrammu metode vispār neparedz līdzīgu formulu paralēlslēguma pārveidošanai!

## Simboliskās metodes lietošanas piemēri

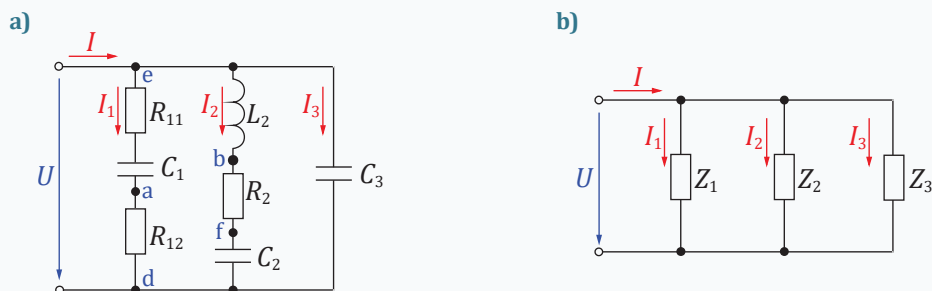
Aprēķinot maiņstrāvas ķēdi ar simbolisko metodi:

- katru no virknes slēgumiem, ko veido pasīvie elementi  $R, L$  un  $C$ , vai atsevišķu šādu elementu shēmā attēlo ar attiecīgu komplekso pretestību  $Z$ , izmantojot formulu (4.0);
- dotos avotu spriegumus vai EDS attēlo ar kompleksiem lielumiem;
- aprēķina strāvu, jaudu un spriegumu kompleksās vērtības, izmantojot kādu no 2. nodaļā aplūkotajām līdzstrāvas ķēžu aprēķina metodēm;
- atrod aprēķinātajiem kompleksajiem lielumiem atbilstošās strāvas, sprieguma un jaudas vērtības.

### 4.3. piemērs

Aprēķināsim iepriekšējā nodaļā (3.8. piemērā) atrisināto uzdevumu ar simbolisko metodi. Salīdzināsim risinājuma metodes un rezultātus.

Maiņsprieguma avotam, kura spriegums  $U = 100 \text{ V}$ , pievienota ķēde ar paralēliem zariem (4.3.a att.). Dotie lielumi:  $R_{11} = 10 \Omega$ ,  $R_{12} = 20 \Omega$ ,  $X_{C1} = 40 \Omega$ ,  $R_2 = 80 \Omega$ ,  $X_{L2} = 100 \Omega$ ,  $X_{C2} = 40 \Omega$ ,  $X_{C3} = 100 \Omega$ . Aprēķināt visas strāvas, patērēto aktīvo un reaktīvo jaudu katrā zarā un visā ķēdē, kā arī spriegumu starp punktiem a un b.



4.3. att. Maiņstrāvas ķēde ar paralēliem zariem (a), aizvietošanas shēma aprēķinam ar simbolisko metodi (b).

### Atrisinājums

1. Shēmā ir trīs zari. Katru no tiem aizstājam ar komplekso pretestību (4.3.b att.). Komplekso pretestību vērtības:

$$Z_1 = R_{11} + R_{12} - jX_{C1} = (30 - j40) \Omega;$$

$$Z_2 = R_2 + jX_{L2} - jX_{C2} = 80 + j100 - j40 = (80 + j60) \Omega;$$

$$Z_3 = -jX_{C3} = -j100 \Omega.$$

2. Doto spriegumu  $U$  aizstājam ar komplekso lielumu  $\underline{U}$ . Sprieguma sākumfāzi varam izvēlēties brīvi, tāpēc visvienkāršāk pieņemt to vienādu ar nulli. Tam atbilst kompleksais spriegums, kam ir tikai reālā daļa:  $\underline{U} = (100 + j0)$  V.
3. Aizvietošanas shēmu aprēķinām līdzīgi līdzstrāvas ķēdei: zinot spriegumu uz pretestībām, atrodam zaru strāvas un pēc tam kopējo strāvu. Vienīgā atšķirība: aprēķinos lieto kompleksos lielumus:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{100}{30 - j40} = \frac{100(30 + j40)}{(30 - j40)(30 + j40)} = \frac{100(30 + j40)}{900 + 1600} = (1,2 + j1,6) \text{ A};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{100}{80 + j60} = \frac{100(80 - j60)}{(80 + j60)(80 - j60)} = \frac{100(80 - j60)}{6400 + 3600} = (0,8 - j0,6) \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3} = \frac{100}{-j100} = \frac{1}{-j} = +j1 \text{ A}.$$

Iegūtas zaru strāvas kompleksās izteiksmes algebriskā formā. Salīdziniet to reālās daļas (1,2; 0,8; 0) un imaginārās daļas (1,6; -0,6; 1) ar strāvu aktīvajām un reaktīvajām komponentēm, ko ieguvām, risinot šo uzdevumu 3.8. piemērā. Ievērojiet, ka tagad tie paši rezultāti iegūti vienkāršāk – bez fāžu nobīdes leņķu aprēķina.

Kopējo strāvu kompleksā formā atrodam, izmantojot pirmo Kirhofa likumu (5.6):

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = (1,2 + j1,6) + (0,8 - j0,6) + j1 = (2 + j2) \text{ A}.$$

4. Kompleksās jaudas atrodam, sareizinot sprieguma komplekso vērtību ar attiecīgā zara strāvas **kompleksi saistīto lielumu**:

$$\underline{S}_1 = \underline{U}\underline{I}_1^* = 100(1,2 - j1,6) = (120 - j160) \text{ VA};$$

$$\underline{S}_2 = \underline{U}\underline{I}_2^* = 100(0,8 + j0,6) = (80 + j60) \text{ VA};$$

$$\underline{S}_3 = \underline{U}\underline{I}_3^* = 100(-j1) = -j100 \text{ VA};$$

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = 120 - j160 + 80 + j60 - j100 = (200 - j200) \text{ VA}.$$

Ievērojiet, ka simboliskā metode automatizē arī jaudu aprēķinu – arī te nav jānosaka fāžu nobīdes leņķis.

5. Atrodam strāvu efektīvās vērtības – tie ir komplekso strāvu moduļi, ko atrod līdzīgi kā vektoru moduļus:

$$I_1 = \sqrt{\text{Re}^2(\underline{I}_1) + \text{Im}^2(\underline{I}_1)} = \sqrt{1,2^2 + 1,6^2} = 2 \text{ A},$$

$$I_2 = \sqrt{\text{Re}^2(\underline{I}_2) + \text{Im}^2(\underline{I}_2)} = \sqrt{0,8^2 + 0,6^2} = 1 \text{ A},$$

$$I_3 = \sqrt{\text{Re}^2(\underline{I}_3) + \text{Im}^2(\underline{I}_3)} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \text{ A},$$

$$I = \sqrt{\text{Re}^2(\underline{I}) + \text{Im}^2(\underline{I})} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2,83 \text{ A}.$$

Aktīvā jauda  $P$  ir kompleksās jaudas reālā daļa. Aktīvās jaudas  $P$  vērtības:

$$P_1 = \operatorname{Re}(\underline{S}_1) = 120 \text{ W}; P_2 = \operatorname{Re}(\underline{S}_2) = 80 \text{ W}; P_3 = \operatorname{Re}(\underline{S}_3) = 0 \text{ W}; P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = 200 \text{ W}.$$

Reaktīvā jauda  $Q$  ir kompleksās jaudas imaginārā daļa. Pozitīva imaginārā daļa nozīmē, ka reaktīvajai jaudai ir induktīvs raksturs, bet negatīva – kapacitīvs raksturs. Reaktīvās jaudas  $Q$  vērtības:

$$Q_1 = \operatorname{Im}(\underline{S}_1) = -160 \text{ var (kapacitīva rakstura);}$$

$$Q_2 = \operatorname{Im}(\underline{S}_2) = 60 \text{ var (induktīva rakstura);}$$

$$Q_3 = \operatorname{Im}(\underline{S}_3) = -100 \text{ var (kapacitīva rakstura);}$$

$$Q = \operatorname{Im}(\underline{S}) = -200 \text{ var (kapacitīva rakstura).}$$

6. Spriegumu starp jebkuriem diviem shēmas punktiem atrodam līdzīgi tam, kā to darītu līdzstrāvas ķēdes shēmā. No punkta a līdz punktam b ved ceļš adfb. Ievērosim, ka šajā ceļā ir posms ad, kurā ir strāva  $I_1$ , un posms dfb, kurā ir strāva  $I_2$ . Izsakām meklējamo spriegumu ar abu posmu spriegumiem (5.5):

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{ad} + \underline{U}_{db}.$$

Posmā ad ir aktīvā pretestība  $R_{12}$ , bet posmā dfb ir virknē slēgts rezistors  $R_2$  un kondensators  $C_2$ . Abu posmu kompleksās pretestības pēc formulas (4.0) ir:

$$\underline{Z}_{ad} = R_{12} = 20; \underline{Z}_{db} = R_2 - jX_{C2} = (80 - j40) \Omega.$$

Izsakām abu posmu spriegumus pēc Oma likuma (4.2) (ievērojot, ka sprieguma  $U_{db}$  un strāvas  $I_2$  pieņemtie pozitīvie virzieni nesakrīt, izteiksmē parādīsies mīnusa zīme):

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= \underline{U}_{ad} + \underline{U}_{db} = \underline{Z}_{ad} I_1 - \underline{Z}_{db} I_2 = 20(1,2 + j1,6) - (80 - j40)(0,8 - j0,6) = \\ &= (-16 + j112) \text{ V}. \end{aligned}$$

Pārliecināties, ka to pašu rezultātu iegūtu arī, aprēķinā izmantojot posma a un posma eb komplekso spriegumu summu:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= \underline{U}_{ae} + \underline{U}_{eb} = -\underline{Z}_{ae} I_1 + \underline{Z}_{eb} I_2 = -(10 - j40)(1,2 + j1,6) + j100(0,8 - j0,6) = \\ &= (-16 + j112) \text{ V}. \end{aligned}$$

Atrodam aprēķinātā sprieguma efektīvo vērtību:

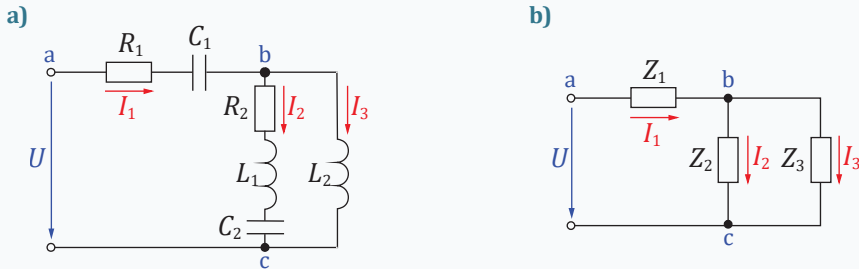
$$U_{ab} = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\underline{U}_{ab}) + \operatorname{Im}^2(\underline{U}_{ab})} = \sqrt{16^2 + 112^2} = 112,3 \text{ V}.$$

Izmantojot vektoru diagrammu metodi, šo spriegumu aprēķināt būtu visai neparocīgi: vajadzētu vektoru diagrammā aprēķināt vairāku leņķu vērtības.

7. Vektoru diagramma

Salīdzinot ar vektoru diagrammu metodi, simboliskās metodes priekšrocība ir tāda, ka aprēķinā nav nepieciešami fāžu nobīdes leņķi, jaudas koeficients un

vektoru diagramma. Vēl vairāk, vektoru diagrammu var uzzīmēt, vienkārši attēlojot iegūtos rezultātus kompleksajā plaknē. Bieži vien vektoru diagrammu zīmē reizē ar aprēķinu, tā kontrolējot katra aprēķinu soļa pareizību. Uzzīmējiet vektoru diagrammu aprēķinātajai shēmai, atliekot kompleksajā plaknē aprēķinātos lielumus – sprieguma un visu strāvu kompleksās vērtības – un salīdziniet to ar 4.5.a attēlu.



4.4. att. Maiņstrāvas ķēde ar jauktu slēgumu (a), shēma ar kompleksajām pretestībām (b).

#### 4.4. piemērs

Maiņsprieguma avotam, kura spriegums  $U = 50$  V, pieslēgta 4.4.a attēla shēma. Doto lielumi:  $R_1 = R_2 = 10 \Omega$ ,  $X_{L1} = X_{L2} = 30 \Omega$ ,  $X_{C1} = X_{C2} = 20 \Omega$ . Aprēķināt visas strāvas un spriegumus, patērēto aktīvo un reaktīvo jaudu.

#### Atrisinājums

1. Shēmā ir trīs zari. Uzrakstām komplekso pretestību izteiksmes:

$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_{C1} = (10 - j20) \Omega; \underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L1} - jX_{C2} = 10 + j30 - j20 = (10 + j10) \Omega; \\ \underline{Z}_3 = jX_{L2} = j30 \Omega.$$

Sastādām aizvietošanas shēmu ar kompleksajām pretestībām (4.4.b att.). Shēmas struktūra ir tāda pati kā līdzstrāvas ķēdei 2.6. attēlā, tāpēc arī aprēķina metode ir līdzīga, atšķirība ir tikai šeit lietotie kompleksie lielumi.

2. Doto spriegumu pārveidojam kompleksā formā:  $\underline{U} = 50$  V.

3. Vispirms ekvivalenti pārveidojam pretestību paralēlslēgumu posmā bc. Pēc tam atrodam visas ķēdes kopējo ekvivalento pretestību  $\underline{Z}$ :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 10 - j20 + \frac{(10 + j10)j30}{10 + j10 + j30} = 10 - j20 + 5,3 + j8,8 = \\ = (15,3 - j11,2) \Omega.$$

Strāvu nesazarotajā ķēdes daļā atrodam, izdalot avota spriegumu ar ķēdes kopējo pretestību:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{50}{15,3 - j11,2} = (2,131 + j1,557) \text{ A.}$$

Lai aprēķinātu abu zaru strāvas posmā bc, vispirms atrodam spriegumu uz šī posma:

$$\underline{U}_{bc} = \underline{Z}_{23} \underline{I}_1 = (5,3 + j8,8)(2,13 + j1,56) = (-2,46 + j27,05) \text{ V.}$$

Aprēķinām arī spriegumu uz posma ab:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U} - \underline{U}_{bc} = 50 - (-2,46 + j27,05) = (52,46 - j27,05) \text{ V.}$$

Strāvas posmā bc:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_2} = \frac{-2,46 + j27,05}{10 + j10} = (1,230 + j1,475) \text{ A;}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_3} = \frac{-2,46 + j27,05}{j30} = (0,901 + j0,082) \text{ A.}$$

4. Kompleksā jauda, ko ģenerē avots vai patērē visas kompleksās pretestības:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}_1^* = 50(2,13 - j1,56) = (106,6 - j77,9) \text{ VA.}$$

Pēdējais rezultāts nozīmē, ka shēma patērē aktīvo jaudu  $P = 106,6 \text{ W}$  un reaktīvo jaudu  $Q = 77,9 \text{ var}$ . Reaktīvā jauda ir kapacitīva rakstura, uz ko norāda mīnusa zīme kompleksās jaudas izteiksmē.

5. Pārejām no strāvu un spriegumu kompleksajiem lielumiem uz to efektīvajām vērtībām, piemēram:

$$I_1 = \sqrt{\text{Re}^2(\underline{I}_1) + \text{Im}^2(\underline{I}_1)} = \sqrt{2,131^2 + 1,557^2} = 2,640 \text{ A.}$$

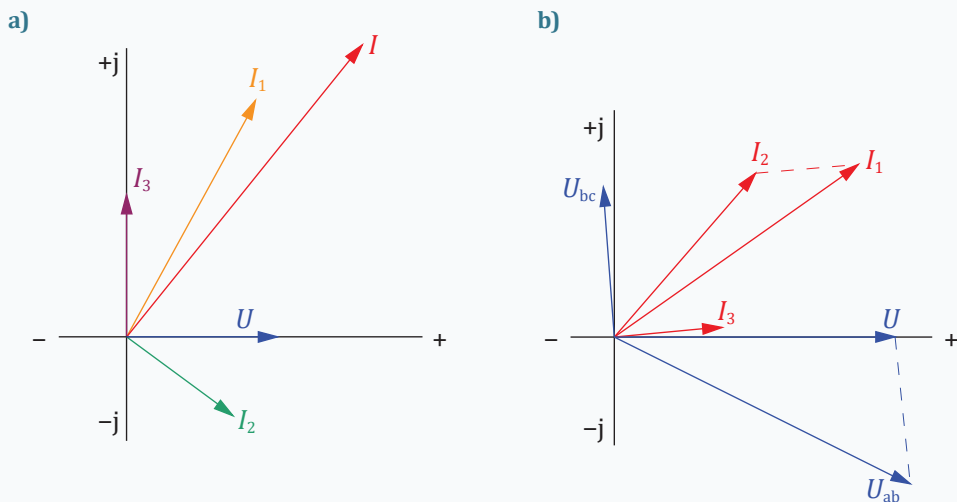
Līdzīgi tam atrod arī pārējās efektīvās vērtības:

$$I_2 = 1,921 \text{ A, } I_3 = 0,905 \text{ A, } U_{ab} = 59,0 \text{ V, } U_{bc} = 27,2 \text{ V.}$$

6. Aprēķinātās shēmas vektoru diagramma parādīta 4.5.b attēlā. Diagrammu zīmē, vispirms izvēloties strāvas un sprieguma mērogu un pēc tam aprēķinātos kompleksos lielumus atliekot kompleksajā plaknē.

Vektoru diagrammas zīmēšana līdztekus aprēķinam atļauj uzreiz kontrolēt iegūto rezultātu pareizību. Piemēram, posma ab kompleksajai pretestībai  $\underline{Z}_1$  ir aktīvi kapacitīvs raksturs, tātad strāvai  $I_1$  jāapsteidz fāzē spriegums  $U_{ab}$ . 4.5.b attēla diagrammā pārliecināties par to. Vēl, piemēram, pretestība  $\underline{Z}_3$  ir tīri induktīva, tāpēc strāvai  $I_3$  jāatpaliek fāzē no sprieguma  $U_{bc}$  tieši par  $90^\circ$ . Pretestības  $\underline{Z}_2$  raksturs ir aktīvi induktīvs, tāpēc vektoru diagramma noder,

lai pārliecinātos, vai tiešām strāva  $I_2$  atpaliek fāzē no sprieguma  $U_{bc}$  par leņķi, ko nosaka attiecīgā zara ( $R_2, L_1$  un  $C_2$ ) pretestību trīsstūris, utt.



4.5. att. Vektoru diagrammas kompleksajā plaknē: 4.3. piemēram (a), 4.4. piemēram (b).

## 4.5. piemērs

Šajā piemērā parādīts, kā maiņstrāvas ķēdes aprēķinam izmanto vienu no līdzstrāvas ķēdes aprēķina metodēm. Atšķirība tikai tāda, ka shēmas parametrus un elektriskos lielumus te pārstāv kompleksie skaitļi.

4.6.a attēla shēmā trīs patērētāji pieslēgti trīsfāžu ģeneratoram. Šādiem avotiem ir trīs EDS ar vienādām efektīvajām vērtībām – dotajā gadījumā  $E_A = E_B = E_C = 127$  V. EDS savstarpēji nobīdīti fāzē par  $120^\circ$ :

$$e_A = \sqrt{2} \cdot 127 \sin \omega t \text{ V}; e_B = \sqrt{2} \cdot 127 \sin(\omega t - 120^\circ) \text{ V}; e_C = \sqrt{2} \cdot 127 \sin(\omega t + 120^\circ) \text{ V}.$$

Dotas patērētāju pretestības:  $R_1 = 30 \Omega$ ,  $X_L = 40 \Omega$ ,  $X_C = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 50 \Omega$ .

Šāda shēma sastopama trīsfāžu ķēdēs, kas sistemātiski aplūkotas nākamajā nodaļā. Pagaidām aprobežosimies ar šādu uzdevumu: noteikt spriegumus starp līnijas vadiem (A, B un C) un spriegumu starp patērētāja neitrāli n un avota neitrāli N.

### Atrisinājums

1. Aizvietošanas shēmā (4.6.b att.) jāparāda trīs kompleksās pretestības ar šādām vērtībām:

$$\underline{Z}_A = R_1 + jX_L = (30 + j40) \Omega; \underline{Z}_B = -jX_C = -j100 \Omega; \underline{Z}_C = R_2 = 50 \Omega.$$



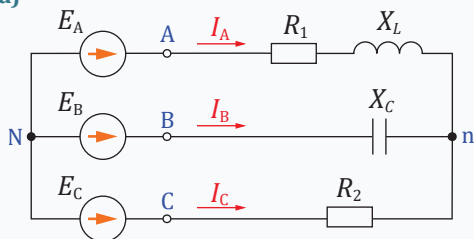
2. Pārveidojam dotos EDS kompleksā formā. Parādītas visas trīs komplekso skaitļu formas: eksponenciālā, trigonometriskā un algebriskā:

$$\underline{E}_A = 127e^{j0^\circ} = 127(\cos 0^\circ + j\sin 0^\circ) = (127 + j0) \text{ V};$$

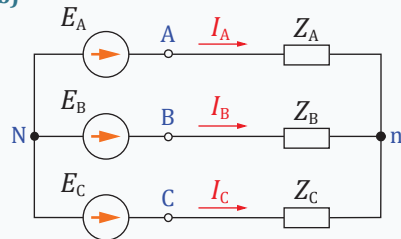
$$\underline{E}_B = 127e^{-j120^\circ} = 127(\cos 120^\circ - j\sin 120^\circ) = (-63,5 - j110) \text{ V};$$

$$\underline{E}_C = 127e^{j120^\circ} = 127(\cos 120^\circ + j\sin 120^\circ) = (-63,5 + j110) \text{ V}.$$

a)



b)



4.6. att. Aprēķināmā shēma (a), aizvietošanas shēma ar kompleksiem lielumiem.

3. Atrodam spriegumus starp līnijas vadiem:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AN} + \underline{U}_{NB} = \underline{E}_A - \underline{E}_B = 127 - (-63,5 - j110) = (190,5 + j110) \text{ V};$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_{BN} + \underline{U}_{NC} = \underline{E}_B - \underline{E}_C = (-63,5 - j110) - (-63,5 + j110) = -j220 \text{ V};$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{CN} + \underline{U}_{NA} = \underline{E}_C - \underline{E}_A = -63,5 + j110 - 127 = (-190,5 + j110) \text{ V}.$$

Izteiksmes sastādīt nav sarežģīti, piemēram:  $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AN} + \underline{U}_{NB}$  sastāda pēc (4.5),  $\underline{U}_{AN} = \underline{E}_A$ ,  $\underline{U}_{NB} = -\underline{E}_B$  sastāda pēc vienādojuma (4.1). Pārbaudiet, kā no tā iegūtas zīmes pēdējās divās izteiksmēs!

4. Aizvietošanas shēmā ir divi mezgli, tādēļ tās aprēķinam piemērota ir **mezglu spriegumu metode**. Mezglu sprieguma aprēķināšana pieder pie šīs metodes obligātās programmas. Izmantosim formulu (2.10) no līdzstrāvas ķēžu teorijas, aizstājot tajā visus lielumus ar kompleksajiem lielumiem:

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{E}_A \underline{Y}_A + \underline{E}_B \underline{Y}_B + \underline{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}.$$

Izteiksmē visi kompleksie EDS ņemti ar plusa zīmi, jo to bultiņas vērstas uz punktu n (mezglu sprieguma  $U_{nN}$  pirmais indekss). Ar  $\underline{Y}$  pieņemts apzīmēt komplekso vadītspēju – tas ir kompleksajai pretestībai  $\underline{Z}$  apgriezts lielums. Aprēķinām visu trīs zaru kompleksās vadītspējas:

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1}{30 + j40} = \frac{30 - j40}{(30 + j40)(30 - j40)} = (0,012 - j0,016) \text{ S};$$

$$\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B} = \frac{1}{-j100} = j0,01 \text{ S}; \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ S}.$$

Ievietojam šīs vērtības mezglu sprieguma izteiksmē un aprēķinām to:

$$\underline{U}_{nN} = \frac{127(0,012 - j0,016) + (-63,5 - j110)j0,01 + (-63,5 + j110)0,02}{0,012 - j0,016 + j0,01 + 0,02} =$$
$$= 43,5 - j6,42 = 44e^{-j9^\circ} \text{ V.}$$

Kompleksā sprieguma  $\underline{U}_{nN}$  algebrisko formu pārveidojot par eksponenciālo, kļūst redzams, ka tā efektīvā vērtība ir 44 V, bet sākumfāze  $-9^\circ$ . Atrisinājuma rezultāti izmantoti nākamajā nodaļā.

Arī šis piemērs ir ilustrācija tam, ka maiņstrāvas ķēdes ar simbolisko metodi iespējams aprēķināt līdzīgi daudz vienkāršākām līdzstrāvas ķēdēm. Redzējām, ka ne tikai elementu, spriegumu un strāvu vienādojumi ir līdzīgi līdzstrāvas ķēžu vienādojumiem, bet ir arī iespējams lietot līdzstrāvas ķēžu aprēķina metodes.



## levietojiet vispiemērotākos vārdus

1. Komplekso skaitļu trigonometrisko formu lieto, lai pārveidotu eksponenciālo formu ..... formā.
2. Komplekso skaitļu reizināšanai izmanto eksponenciālo un ..... formu.
3. Kompleksais skaitlis un tā kompleksi saistītais skaitlis atšķiras ar ..... daļas zīmi.
4. Komplekso pretestību lieto elementu ..... vai atsevišķam elementam.
5. Kompleksā pretestība ir ..... komplekso skaitļu plaknē.
6. Kompleksās jaudas formulā lieto strāvas ..... aprēķina metodes.
7. Simboliskā metode atļauj maiņstrāvas ķēdēs lietot visas ..... aprēķina metodes.

## Salīdziniet atbildes

1) algebriskajā; 2) algebriskā; 3) imaginārās; 4) virknes slēgumam; 5) pretestību trīsstūris; 6) kompleksi saistīto vērtību; 7) līdzstrāvas ķēžu.

## 5. NODAĻA

### Trīsfāžu maiņstrāvas ķēdes

Elektriskās enerģijas pārvadīšanai lielos attālumos izmanto maiņstrāvas pārvades līnijas. Līnijas sākumā spriegumu transformē augstspriegumā, lai enerģijas pārvadīšanai būtu mazāki zudumi. Ceļā līdz patērētājiem spriegumu vairākkārt transformē, pazeminot līdz patērētājiem piemērotam līmenim. Praktiski visas elektriskās sistēmas, kurās ražo, pārvada un sadala patērētājiem elektrisko enerģiju, ir trīsfāžu maiņstrāvas sistēmas.

Trīsfāžu maiņstrāvas sistēmas galvenās priekšrocības, salīdzinot ar vienfāzes maiņstrāvu:

- trīsfāžu sistēma ir piemērota, lai iegūtu **rotējošu magnētisko lauku**, – šis apstāklis savulaik deva iespēju izveidot visai vienkāršas konstrukcijas trīsfāžu asinhrono elektrodzinēju, kas arī mūsdienās ir visizplatītākā elektriskā mašīna,
- ar trīsfāžu pārvades sistēmu panāk transformatoru un vadu materiāla izmaksu ekonomiju, salīdzinot ar tādas pašas jaudas vienfāzes maiņstrāvas sistēmu,
- trīsfāžu sistēmā iespējams izmantot jebkuru no divām pieejamām sprieguma vērtībām, piemēram: 400/690 V, 230/400 V vai 127/220 V.

Šajā nodaļā aplūkoti trīsfāžu maiņstrāvas ķēžu analīzes principi. Trīsfāžu ķēdēs paliek spēkā visi maiņstrāvas ķēdes vienādojumi. Aprēķinos lieto kā vektoru diagrammu metodi, tā arī (sarežģītākos gadījumos) simbolisko metodi. Jaunais materiāls šajā nodaļā saistīts galvenokārt ar trīsfāžu maiņstrāvas ķēdes topoloģijas īpatnībām.

Vienkāršots trīsfāžu ķēdes modelis, ko lietosim aprēķinos, sastāv no trīsfāžu maiņstrāvas avota, idealizētas pārvades līnijas un trīsfāžu patērētāja. Avotu nosacīti sauksim par ģeneratoru, lai gan parasti patērētāju pievieno trīsfāžu transformatora sekundārā tinuma spailēm.

---

Šajā nodaļā jūs iepazīsities ar

- trīsfāžu ģenerators shēmu, topogrāfisko diagrammu un spriegumiem,
- trīsvadu un četrvadu pārvades līnijas strāvām,
- trīsfāžu patērētāja slēguma shēmām un analīzes plānu,

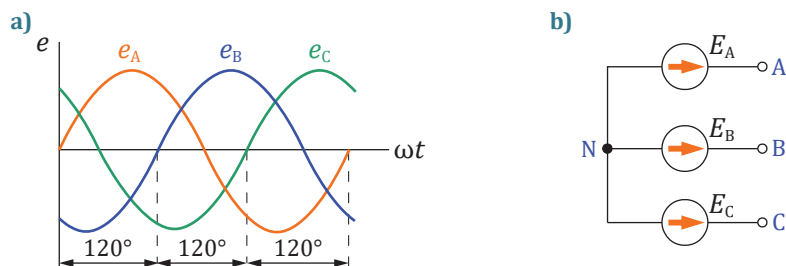
- simetriskiem, nesimetriskiem un avārijas režīmiem trīsfāžu sistēmā,
- trīsfāžu patērētāja aktīvo jaudu un tās mērīšanu,
- zvaigznē vai trīsstūrī slēgta simetriska un nesimetriska patērētāja aprēķiniem, izmantojot vektoru diagrammu metodi un simbolisko metodi.

## Trīsfāžu sistēmas aizvietošanas shēmas elementi

### Trīsfāžu ģenerators shēma un spriegumi

Trīsfāžu ģenerators ir elektriskā mašīna ar **statorā** novietotiem trīs tinumiem (fāzēm). Terminam “fāze” bez līdz šim lietotās nozīmes ir arī otra – par fāzi sauc katru no trīsfāžu avota, patērētāja vai pārvades līnijas trīs daļām. Trīsfāžu ģenerators darbībai nepieciešamo magnētisko lauku rada **rotoram** pievadītā līdzstrāva. Pievadot mehānisko enerģiju, rotoru griež, magnētiskais lauks pārvietojas attiecībā pret statora tinumiem un inducē tajos EDS. Statora tinumu izvietojums un magnētiskās ķēdes konfigurācija ir tāda, lai tinumos inducētie EDS būtu sinusoidāli un savstarpēji nobīdīti fāzē par  $120^\circ$ :

$$e_A = E_m \sin \omega t, e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ), e_C = E_m \sin(\omega t - 240^\circ).$$



5.1. att. Trīsfāžu ģenerators EDS (spriegumu) laika diagramma (a), shēma zvaigznes slēgumā (b).

Turpmāk uzskatīsim, ka ģenerators fāzes savienotas zvaigznē, kā tas redzams 5.1.b attēla shēmā. Trīs fāžu tinumi savienoti kopējā punktā N, ko sauc par **ģenerators neitrāli** (lieto arī terminu **neitrālpunkts**). Pārvades līnijas vadus, kas ģenerators savieno ar patērētāju, pievieno izvadiem A, B un C.

Shēmā ir seši spriegumi.  $U_{AN}$ ,  $U_{BN}$  un  $U_{CN}$  ir **ģenerators fāžu spriegumi** (kopējais apzīmējums:  $U_f$ ). Spriegumus starp pārvades līnijas vadiem  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$  un  $U_{CA}$  sauc par **līnijas spriegumiem** (kopējais apzīmējums:  $U$ ).

### Trīsfāžu ģenerators topogrāfiskā diagramma

Lai iegūtu trīsfāžu ģenerators topogrāfisko diagrammu (5.2.c att.), vispirms zīmē EDS laika diagrammai (5.1.a att.) atbilstošu **vektoru diagrammu** (5.2.a att.). A fāzes EDS vektora virziens pieņemts patvaļīgi. Pieņemtā fāžu secība ir tāda, ka B fāzes EDS

no tā **atpaliek** fāzē par  $120^\circ$  utt. Diagrammā visus EDS aizstāj ar fāžu spriegumiem saskaņā ar “tabulas formulu” (3.1):

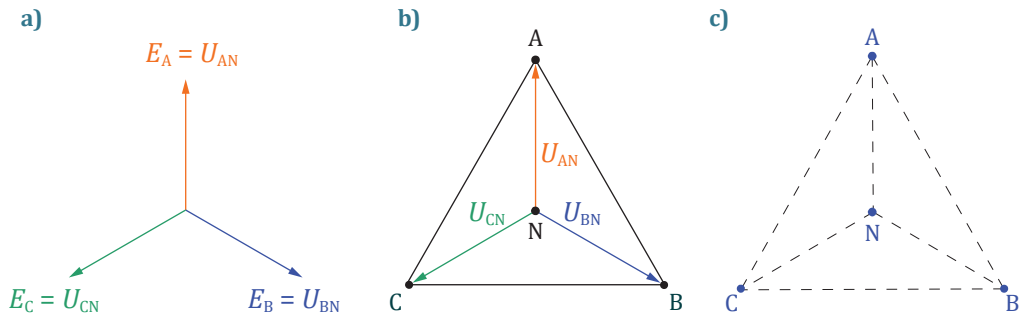
$$\bar{E}_A = \bar{U}_{AN}; \quad \bar{E}_B = \bar{U}_{BN}; \quad \bar{E}_C = \bar{U}_{CN}.$$

Pārnesot spriegumu  $\bar{U}_{AN}$  no vektoru diagrammas uz **topogrāfisko diagrammu** (5.2.b att.), iegūst pirmos divus tās punktus (A un N). Pārnesot arī pārējos divus spriegumus, topogrāfiskajā diagrammā parādās arī punkts B un C. Iegūta zvaigznē slēgta trīsfāžu avota topogrāfiskā diagramma (5.2.c att.): punkti A, B un C atrodas vienādmalu trīsstūra virsotnēs, bet punkts N – tā simetrijas centrā.

Kā zināms: pirmkārt, katrs topogrāfiskās diagrammas punkts atbilst attiecīgā shēmas punkta potenciālam; otrkārt, ikviena sprieguma vērtībai atbilst attālums starp attiecīgajiem punktiem diagrammā; treškārt, sprieguma vektora bultiņa vērsta uz punktu, ko raksta kā pirmo indeksu, piemēram, sprieguma  $U_{AB}$  vektors sākas diagrammas punktā B un beidzas punktā A.

Topogrāfiskajā diagrammā redzams, ka ne tikai visu fāžu spriegumu vērtības, bet arī visu līnijas spriegumu  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$  un  $U_{CA}$  vērtības ir vienādas. Tā kā diagrammā sastopamās leņķu vērtības ir tikai  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  un  $120^\circ$ , tad viegli iegūt sakarību starp līnijas spriegumu un **ģenerators** (bet ne patērētāja) fāzes spriegumu:

$$U_1 = \sqrt{3}U_f. \quad (5.1)$$



5.2. att. Trīsfāžu ģenerators vektoru diagramma (a), topogrāfiskā diagramma (b, c).

Topogrāfiskā diagramma visai kompakti glabā informāciju par visiem shēmas spriegumiem. Dažādām trīsfāžu avota topogrāfiskajām diagrammām (5.2.c att.) atšķiras tikai mērogs. Kas jāzina, lai noteiktu visus sešus ģenerators spriegumus? Izrādās, ka tikai viens lielums, piemēram, līnijas vai fāzes sprieguma vērtība.

## Pārvades līnija

Trīsfāžu sistēmā ģenerators ar patērētājiem savieno pārvades līnija ar trīs vai četriem vadiem (5.3. att.). Vadus AA, BB un CC sauc par līnijas vadiem, bet strāvas tajos ( $I_A$ ,  $I_B$  un  $I_C$ ) – par **līnijas strāvām**. Četrvadu sistēmā pārvades līnijai ir arī **neitrālvads** NN,

kura strāva ir  $I_N$ . Aizvietošanas shēmās **pieņemtie pozitīvie virzieni** līnijas strāvām ir no avota uz patērētāju, bet strāvai neitrālvadā – pretējā virzienā. No 5.3. attēla redzams, ka (neatkarīgi no patērētāja slēguma veida) sakarības starp strāvām trīsfāžu sistēmā ir šādas:

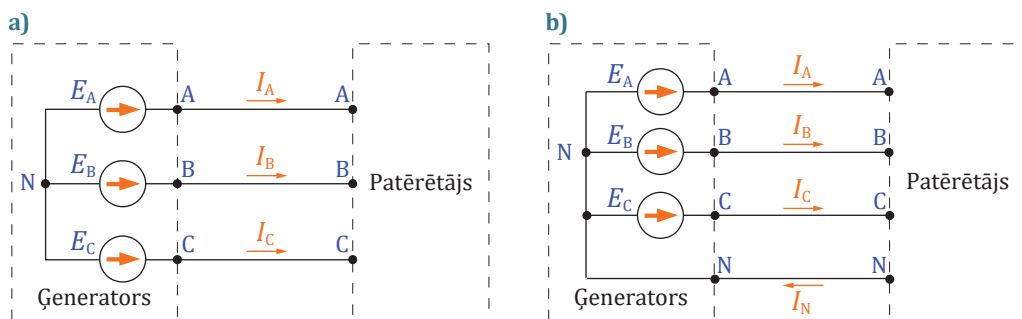
*trīsvadu sistēmā*

$$\bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C = 0, \quad (5.2)$$

*četrvadu sistēmā*

$$\bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C = \bar{I}_N. \quad (5.3)$$

Vienkāršojot trīsfāžu sistēmas analīzi un aprēķinu, visus pārvades līnijas vadus uzskata par ideāliem (bez pretestības), t. i., līnijā nav sprieguma zuduma. Tas nozīmē, ka punktiem A, B, C un N līnijas sākumā (pie ģeneratora) un beigās (pie patērētāja) ir vienādi potenciāli un topogrāfiskajā diagrammā šie punkti sakrīt.



5.3. att. Strāvas trīsfāžu pārvades līnijā: trīsvadu sistēmā (a), četrvadu sistēmā (b).

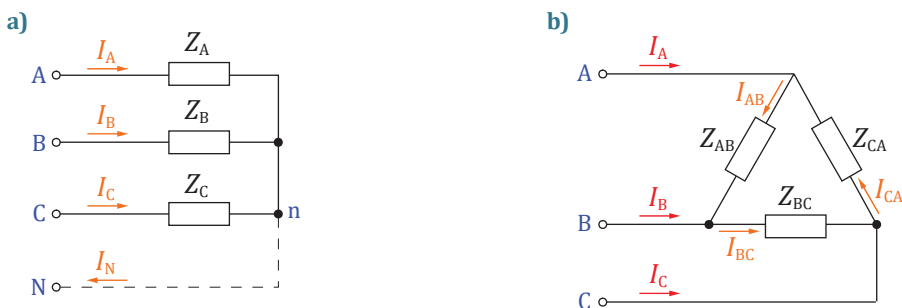
## Trīsfāžu patērētājs

### Patērētāja strāvas

Trīsfāžu sistēmā arī patērētājam ir trīs daļas (fāzes), kas var būt slēgtas zvaigznē (5.4.a att.) vai trīsstūrī (5.4.b att.). Zvaigznē slēgta patērētāja fāzes apzīmē ar burtiem A, B un C. Tos lieto kā indeksus, apzīmējot patērētāja fāžu pretestības ( $Z_A, Z_B$  un  $Z_C$ ) un patērētāja fāžu strāvas ( $I_A, I_B$  un  $I_C$ ). Trīsstūrī slēgta patērētāja fāzes apzīmē citādi – AB, BC un CA –, jo katra patērētāja fāze šeit pieslēgta diviem līnijas punktiem. Fāžu pretestību ( $Z_{AB}, Z_{BC}$  un  $Z_{CA}$ ) un fāžu strāvu ( $I_{AB}, I_{BC}$  un  $I_{CA}$ ) apzīmējumos tad lieto divus indeksus.

Aplūkojot 5.4.a attēlu, redzams, ka **zvaigznē savienota patērētāja fāzēs plūst līnijas strāvas**. Tādēļ arī fāžu strāvu un līnijas strāvu apzīmējumi ( $I_A, I_B$  un  $I_C$ ) ir vienādi. Trīsstūra slēgumā (5.4.b att.) līnijas strāvas atrašanai, ja zināmas fāzes strāvas, lieto strāvu vienādojumu (3.6) attiecīgajam mezgla punktam A, B vai C:

$$\bar{I}_A = \bar{I}_{AB} - \bar{I}_{CA}; \quad \bar{I}_B = \bar{I}_{BC} - \bar{I}_{AB}; \quad \bar{I}_C = \bar{I}_{CA} - \bar{I}_{BC}. \quad (5.4)$$



5.4. att. Trīsfāžu patērētājs: zvaigznes slēgumā (a), trīsstūra slēgumā (b).

### Patērētāja spriegumi

Spriegumus uz patērētāja fāzēm (pamēģiniet tos sameklēt 5.4. attēla shēmās) sauc par **patērētāja fāžu spriegumiem**. Ievērojiet, ka **trīsstūra slēgumā** patērētāja fāzēm ir pievadīti **līnijas spriegumi**:  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$  un  $U_{CA}$ . Zvaigznes slēgumā patērētāja fāžu spriegumi ir  $U_{An}$ ,  $U_{Bn}$  un  $U_{Cn}$ . Pēdējos literatūrā mēdz apzīmēt arī “vienkāršāk” ( $U_A$ ,  $U_B$  un  $U_C$ ), taču tad tikai no konteksta var noprast, vai ar to domāti patērētāja vai ģenerātorā fāžu spriegumi.

### Simetrisks un nesimetrisks patērētājs

Patērētājs var būt simetrisks vai nesimetrisks. Simetrijas noteikums: visu trīs patērētāja fāžu pretestībām jābūt vienādām **ne tikai skaitliski** ( $Z_A = Z_B = Z_C$  – zvaigznē slēgtam vai  $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA}$  – trīsstūrī slēgtam patērētājam), bet arī **pēc rakstura** ( $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C$  vai  $\varphi_{AB} = \varphi_{BC} = \varphi_{CA}$ ).

## Trīsfāžu patērētāja vektoru diagramma un analīze

Vektoru diagrammas zīmēšanas plāns – pats svarīgākais!

Pieņemsim, ka dota trīsfāžu maiņstrāvas ķēde un jārisina parastais uzdevums: doti avotu spriegumi (te pietiek zināt tikai vienu lielumu – līnijas spriegumu vai ģenerātorā fāzes spriegumu, jo ar to ir norādīts topogrāfiskās diagrammas mērogs), dota arī patērētāja slēguma shēma un tā fāžu pretestības. Jāatrod visu strāvu efektīvās vērtības.

Aprēķinot trīsfāžu ķēdes, zīmējot vektoru diagrammas vai izsekojot trīsfāžu patērētāja režīmu analīzei, der ievērot, ka vienmēr izmanto šādu plānu:

- 1) **patērētāja topogrāfiskā diagramma;**
- 2) **fāžu spriegumi tajā;**
- 3) **fāžu strāvas;**
- 4) **pārējās strāvas.**

Tas nozīmē, ka vienmēr vektoru diagrammas zīmēšanu vai aprēķinu sāk ar dotā patērētāja **topogrāfisko diagrammu**, lai noteiktu patērētāja **fāžu spriegumus**. Kad tie ir zināmi, katru patērētāja fāzi var aplūkot atsevišķi kā **vienfāzes** maiņstrāvas ķēdi ar zināmu spriegumu un tajā aprēķināt attiecīgās **fāzes strāvu** (tās efektīvo vērtību un fāžu nobīdi). **Pārējās strāvas** (strāvu neitrālvadā vai līnijas strāvas) atrod, izmantojot



attiecīgās shēmas strāvu vienādojumus (5.2), (5.3) vai (5.4). Tie, protams, attiecas uz vektoriem (tāpēc arī jāzīmē vektoru diagramma), bet nekādā gadījumā ne uz strāvu skaitliskajām vērtībām. Piemēram, ja visās fāzēs strāvas vērtība ir 5 A, tad pēc (5.3) to vektoru summa nekādi nevar būt 15 A (arī nulle ne vienmēr).

### Trīsfāžu patērētāja topogrāfiskā diagramma un fāžu spriegumi

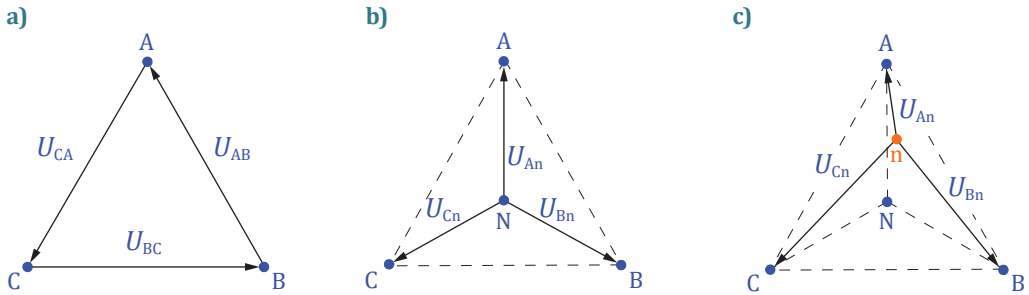
Patērētāja topogrāfiskajā diagrammā atrodami visu patērētāja punktu potenciāli. Zvaigznes slēgumā patērētājam ir četri punkti: A, B, C un n (5.4.a att.), trīsstūra slēgumā – trīs punkti: A, B un C (5.4.b att.). Patērētāja topogrāfisko diagrammu zīmē, izmantojot ģenerators topogrāfisko diagrammu (5.2.c att.). Uzskatot pārvades līniju par ideālu, pamatprincips šeit ir vienkāršs: ja shēmā attiecīgie ģenerators un patērētāja punkti ir savienoti (ar līnijas vadu vai neitrālvadu), tad to potenciāli ir vienādi un arī topogrāfiskajās diagrammās šie punkti sakrīt. Citiem vārdiem, **patērētāja topogrāfiskajā diagrammā ir zināmi tie punkti, kas shēmā savienoti ar ģeneratoru.**

Jebkurā normālā (ne avārijas) režīmā patērētājam pienāk vismaz trīs līnijas vadi. Tas nozīmē, ka patērētāja topogrāfiskajā diagrammā punkti A, B un C atrodas turpat, kur ģenerators topogrāfiskajā diagrammā, – vienādmalu trīsstūra virsotnēs (5.5. att.). Līdz ar to uzdevums vienkāršojas – nezināma paliek tikai patērētāja neitrālpunkta n (ja tāds ir) atrašanās vieta diagrammā.

Apskatīsim **visus** trīs iespējamus gadījumus, parādot topogrāfiskajā diagrammā arī patērētāja fāžu spriegumus.

1. **Patērētājs slēgts trīsstūrī** – tad shēmā (5.4.b att.) ceturta punkta nav un patērētāja topogrāfiskajā diagrammā (5.5.a att.) visi trīs punkti ir zināmi. Diagrammā katras fāzes spriegumu attēlo vektors starp tiem diviem punktiem, kuriem shēmā šī fāze pieslēgta. Piemēram, fāzes AB sprieguma vektors  $\vec{U}_{AB}$  savieno diagrammas punktus A un B (jāatceras, ka topogrāfiskajā diagrammā vektora bultiņa norāda uz punktu, ko raksta kā pirmo indeksu, – šajā gadījumā uz punktu A).
2. **Patērētājs slēgts zvaigznē ar neitrālvadu** (5.4.a att.). Te visi četri patērētāja punkti ir savienoti ar attiecīgajiem ģenerators punktiem. Patērētāja topogrāfiskā diagramma (tāda pati kā ģeneratoram) parādīta 5.5.b attēlā. Patērētāja fāžu spriegumi  $U_{An}$ ,  $U_{Bn}$  un  $U_{Cn}$  ir tādi paši kā ģenerators fāžu spriegumi, tagad arī patērētājam ir spēkā sakarība (5.1).
3. **Patērētājs slēgts zvaigznē bez neitrālvada** (5.4.a att.). Tad patērētāja neitrālpunkta n potenciāls un ģenerators neitrālpunkta N potenciāls topogrāfiskajā diagrammā nesakrīt. Attālumam Nn atbilstošo spriegumu  $\vec{U}_{nN}$  sauc par **neitrāles nobīdes spriegumu**. Topogrāfiskā diagramma šim gadījumam parādīta 5.5.c attēlā. Fāžu spriegumu  $U_{An}$ ,  $U_{Bn}$  un  $U_{Cn}$  vērtības tagad nav vienādas. Neitrāles nobīdes spriegums atkarīgs no patērētāja fāžu nesimetrijas pakāpes: fāžu nesimetrijai pieaugot, neitrāles nobīdes spriegums pieaug.

Īpašā gadījumā – ja patērētājs ir simetrisks – zvaigznē slēgtam patērētājam arī bez neitrālvada neitrāles nobīdes nav. Tad diagramma ir tāda pati kā četrvadu sistēmas gadījumā (5.5.b att.).



5.5. att. Patērētāja topogrāfiskā diagramma: trīsstūra slēgumam (a), zvaigznes slēgumam ar neitrālvadu (b), nesimetriskam patērētājam zvaigznē bez neitrālvada (c).

### Secinājumi

No aplūkotajām diagrammām saprotama neitrālvada nozīme: shēma ar neitrālvadu nodrošina arī zvaigznē slēgtam **nesimetriskam patērētājam** vienādu (simetriskus) **fāžu** spriegumus.

Noskaidrojām, kāpēc gandrīz visos gadījumos (patērētājam trīsstūra slēgumā, patērētājam zvaigznes slēgumā ar neitrālvadu, simetriskam patērētājam) patērētāja fāžu spriegumi ir stingri noteikti ar topogrāfisko diagrammu – tātad bez sarežģīta aprēķina.

Tikai vienā gadījumā patērētāja fāžu spriegumu noteikšana nav tik vienkārša – nesimetriskam patērētājam zvaigznes slēgumā bez neitrālvada. Tad neitrāles nobīdes spriegumu (5.5.c att.) un patērētāja fāžu spriegumus iespējams aprēķināt tikai ar **simbolisko metodi**.

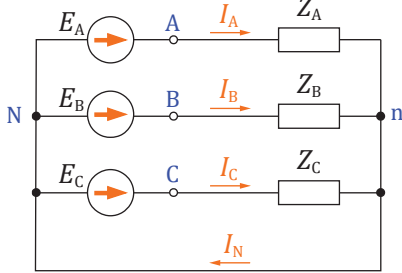
Kad patērētāja topogrāfiskā diagramma un tā fāžu spriegumi ir zināmi, zīmē patērētāja vektoru diagrammu, realizējot šādu plānu: **patērētāja topogrāfiskā diagramma; fāžu spriegumi; fāžu strāvas; pārējās strāvas**. Ar pirmajiem plāna punktiem jau iepazināmies. Turpinājumā aplūkosim, kā ar vektoru diagrammu palīdzību nosaka strāvas konkrētos gadījumos: zvaigznes un trīsstūra slēgumam, trīsvadu un četrvadu sistēmā, simetriskam un nesimetriskam patērētājam, kā arī dažos avārijas režīmos.

### Trīsfāžu patērētājs zvaigznes slēgumā

Zvaigznē slēgtam patērētājam (5.6. att. un 5.9. att.) ir četri punkti: A, B, C, kuriem pienāk līnijas vadi, un patērētāja neitrālpunkts n. Patērētāja fāžu pretestības apzīmē ar  $Z_A$ ,  $Z_B$  un  $Z_C$ , patērētāja fāžu strāvas ar  $I_A$ ,  $I_B$  un  $I_C$ . Patērētāja fāzēs plūst līnijas strāvas.

Tikai vienā no četrām situācijām (simetrisks/nesimetrisks patērētājs, ar/bez neitrālvada) – nesimetriskam patērētājam bez neitrālvada – jāaprēķinās ar neitrāles nobīdi (5.5.c att.), kā rezultātā patērētāja fāžu spriegumi  $U_{An}$ ,  $U_{Bn}$  un  $U_{Cn}$  atšķiras no ģeneratora fāžu spriegumiem  $U_{AN}$ ,  $U_{BN}$  un  $U_{CN}$ . Sākumā aplūkosim trīs vienkāršākos gadījumus.

## Zvaigznes slēgums ar neitrālvadu



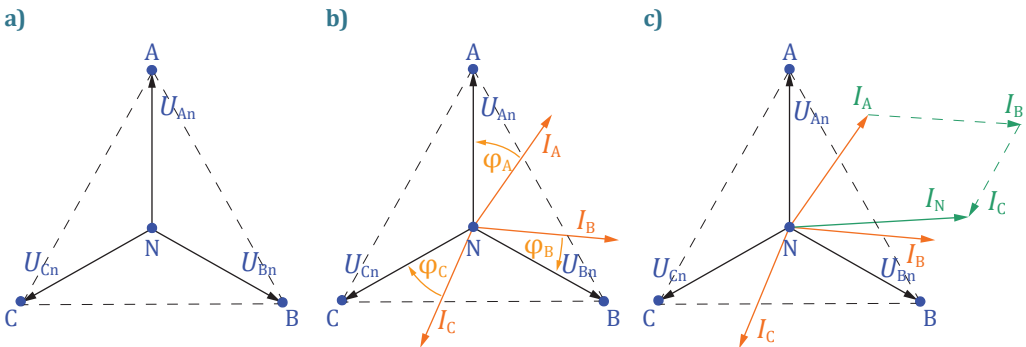
5.6. att. Četrvadu sistēmas shēma.

Četrvadu sistēmā (5.6. att.) patērētāja neitrāli n un ģenerators neitrāli N savieno neitrālvads. Lai vienkāršotu strāvu vienādojumu (5.3), neitrālvasa strāvas  $I_N$  virzienu pieņem pretēju līnijas strāvu virzieniem.

5.7. attēls rāda, kā realizē patērētāja topogrāfisko un vektoru diagrammas zīmēšanas plānu šajā gadījumā:

- 1) zīmē **patērētāja topogrāfisko diagrammu** (5.7.a att.);
- 2) diagrammā parāda patērētāja fāžu spriegumus. Redzams, ka visas patērētāja fāzes saņem vienādus, fāzē savstarpēji par  $120^\circ$  nobīdītus spriegumus  $U_{An}$ ,  $U_{Bn}$  un  $U_{Cn}$ , kas ir skaitliski vienādi ar ģenerators fāzes spriegumu  $U_f$ :

$$U_{An} = U_{Bn} = U_{Cn} = U_{AN} = U_{BN} = U_{CN} = U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}};$$



5.7. att. Diagrammas zīmēšanas gaita patērētājam četrvadu sistēmā.

- 3) zinot patērētāja fāžu spriegumu vektorus, diagrammu papildina ar **fāžu strāvu** vektoriem. Vispārīgā gadījumā, kad patērētājs ir nesimetrisks, fāžu strāvas ir dažāda lieluma un to vektori ir dažādi nobīdīti attiecībā pret fāžu spriegumiem. Zinot fāžu sprieguma vērtību un patērētāja fāžu pretestības, varēs aprēķināt fāžu strāvu efektīvās vērtības:

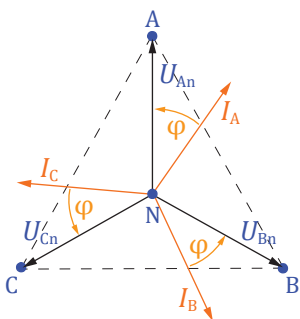
$$I_A = \frac{U_f}{Z_A}; \quad I_B = \frac{U_f}{Z_B}; \quad I_C = \frac{U_f}{Z_C}.$$

Zinot fāžu nobīdes leņķus  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$  un  $\varphi_C$ , ko nosaka patērētāja pretestības, fāžu strāvu vektorus atliek diagrammā (5.7.b att.);

- 4) vektoru diagrammu papildina ar **neitrālvasa strāvas** vektoru. To atrod sakāņā ar (5.3), summējot diagrammā fāžu strāvu vektorus:

$$\vec{I}_N = \vec{I}_A + \vec{I}_B + \vec{I}_C.$$

Rezultātā iegūta zvaigznē slēgta nesimetriska patērētāja vektoru diagramma (5.7.c att.). Konkrētam patērētājam diagrammā atšķirsies tikai strāvu vektori.



5.8. att. Simetriska patērētāja topogrāfiskā un vektoru diagramma.

### Speciālgadījums: simetrisks patērētājs

Ja patērētājs ir **simetrisks**, t. i., ja visu trīs fāžu pretestības ir vienādas (pēc lieluma un rakstura):

$$Z_A = Z_B = Z_C, \quad \varphi_A = \varphi_B = \varphi_C,$$

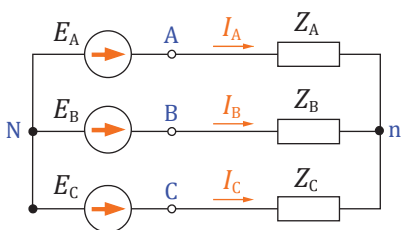
tad visās fāzēs strāvas ir vienāda lieluma un vienādi nobīdītas pret attiecīgo fāžu spriegumiem. Tad fāžu strāvu vektoru summa (5.3) ir vienāda ar nulli un neitrālvadā strāva neplūst.

Zvaigznē slēgta simetriska patērētāja topogrāfiskā un vektoru diagramma parādīta 5.8. attēlā.

### Secinājumi

No šiem diviem piemēriem izriet, ka **četrvadu sistēmā patērētāja fāzes vienmēr saņem vienāda lieluma spriegumus**, bet strāva neitrālvadā ir atkarīga no patērētāja fāžu pretestību nesimetrijas pakāpes. **Ja patērētājs ir simetrisks, tad neitrālvadā strāva neplūst:**  $I_N = 0$  A.

### Zvaigznes slēgums bez neitrālvada



5.9. att. Trīs vadu sistēma ar zvaigznē slēgtu patērētāju.

Zvaigznes slēguma shēma bez neitrālvada parādīta 5.9. attēlā. Atšķirībā no četrvadu sistēmas šeit neitrālvada nav un patērētāja neitrāles n potenciāls var nebūt vienāds ar ģeneratora neitrāles N potenciālu. Topogrāfiskajā diagrammā patērētāja neitrāle n vispārīgā gadījumā ir nobīdīta (5.5.c att.), un tad patērētāja fāžu spriegumi  $U_{An}$ ,  $U_{Bn}$  un  $U_{Cn}$  būs **dažāda lieluma**. Vispirms aplūkosim vienīgo izņēmumu – ja patērētājs ir simetrisks.

### Zvaigznē slēgts simetrisks patērētājs bez neitrālvada

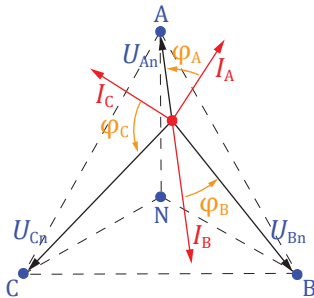
Tā kā visu patērētāja fāžu pretestības ir vienādas pēc lieluma un rakstura, tad nav pamata domāt, ka uz kādas no tām sprieguma vērtība atšķirtos no citām. **Patērētāja topogrāfiskā diagramma** ir tāda pati (5.7.a att.) kā iepriekšējā gadījumā (arī simetrisks patērētājs, bet četrvadu sistēmā). Turpinot zīmēt patērētāja vektoru diagrammu pēc plāna (...; **fāžu spriegumi**; **fāžu strāvas**; pārējo strāvu šeit nav), iegūstam tādu pašu topogrāfisko un vektoru diagrammu kā 5.8. attēlā.

No tā, ka diagrammas abiem gadījumiem pilnīgi sakrīt, var secināt: **ja zvaigznē slēgts patērētājs ir simetrisks, tad neitrālvads nav nepieciešams.**

### Zvaigznē slēgts nesimetriskais patērētājs bez neitrālveda

Ja patērētāja fāžu pretestības nav vienādas, tad topogrāfiskajā diagrammā punkts n nesakrīt ar punktu N. Tas nozīmē, ka shēmā starp šiem punktiem pastāv neitrāles nobīdes spriegums  $U_{nN}$ , jo tas ir lielāks, jo lielāka ir patērētāja fāžu nesimetrija. Lai atrastu neitrāles nobīdes sprieguma vektoru, nepieciešams lietot kompleksos lielumus (simbolisko metodi), kā tas parādīts 4. nodaļā (4.5. piemērs). Pagaidām aprobežosimies ar norādījumu par patērētāja neitrāles n nobīdes tendenci: ja kādā no fāzēm (A, B vai C) pretestību samazina, šīs fāzes spriegums samazinās un punkts n **topogrāfiskajā diagrammā pārvietojas** attiecīgās fāzes punkta virzienā. Piemēram, ja fāzē B pretestību samazina līdz nullei, tad punkts n diagrammā sakrīt ar punktu B.

Pēc tam, kad neitrāles nobīde atrasta, patērētāja fāžu spriegumu vektorus zīmē, savienojot diagrammā punktu n ar punktiem A, B un C. Bultiņas atliek punktu A, B un C virzienā (5.10. att.).



5.10. att. Topogrāfiskā un vektoru diagramma ar neitrāles nobīdi.

Atšķirībā no visiem iepriekšējiem gadījumiem aprēķinā tagad fāžu spriegumu vērtības ir dažādas, kas jāievēro, aprēķinot fāžu strāvas:

$$I_A = \frac{U_{An}}{Z_A}; \quad I_B = \frac{U_{Bn}}{Z_B}; \quad I_C = \frac{U_{Cn}}{Z_C}.$$

Zinot fāžu nobīdes leņķus  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$  un  $\varphi_C$ , zīmē fāžu strāvu vektorus. Ievērojiet, ka leņķis  $\varphi_A$  nozīmē fāzes strāvas  $I_A$  nobīdi attiecībā pret **patērētāja** fāzes sprieguma  $U_{An}$  vektoru (nevis ģenerators fāzes sprieguma  $U_{AN}$  vektoru).

### Avārijas režīmi trīsvalu sistēmā

Aplūkosim divus patērētāja nesimetrijas robežgadījumus trīsvalu sistēmā – ja kādas fāzes pretestība ir bezgalīgi liela (fāzes pārtraukums) vai vienāda ar nulli (īsslēgums). **Četrvalu sistēmā** patērētāja fāzes saņem ģenerators fāžu spriegumus, tāpēc vienas fāzes pārtraukuma gadījumā abu pārējo fāžu spriegumi paliek bez izmaiņām, bet fāzes īsslēgums būtu bīstams avārijas režīms (ievērojiet 5.6. att. shēmā strāvas ceļu pa neitrālvadu un fāzi bez pretestības). Turpretī **trīsvalu sistēmā** (5.11.c att.) vienas fāzes īsslēguma gadījumā patērētājs turpinātu darboties – tiesa gan, ar pārspriegumiem abās pārējās fāzēs (5.11.d att.).

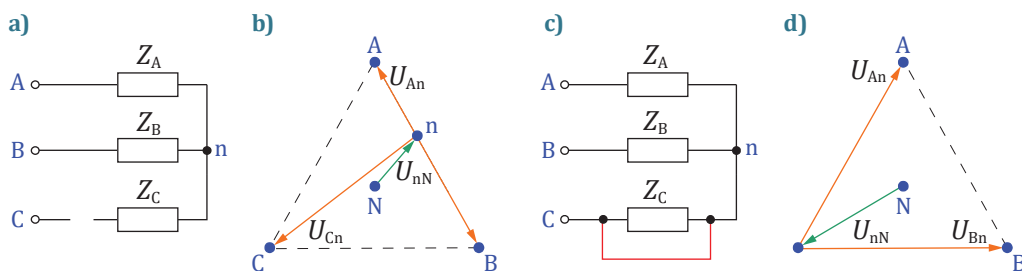
### Fāzes pārtraukums

5.11.a attēla shēmā C fāze ir pārtraukta (t. i., fāzes pretestība  $Z_C$  ir bezgalīgi liela). Tad topogrāfiskajā diagrammā (5.11.b att.) punkts n attālinās no C. Ja visas patērētāja

pretestības ir rezistīvas, tad punkts  $n$  atrodas uz taisnes  $AB$ . Topogrāfiskā diagramma rāda, ka spriegumi uz pārējām fāzēm samazinās. Turklāt šajā slēgumā patērētāja fāzes pārtraukums nozīmē to pašu, ko pārtraukums vienā līnijas vadā. Pārējās divas fāzes tagad faktiski ir pieslēgtas vienfāzes avotam, kura spriegums ir  $U_{AB'}$  un veido virknes slēgumu.

### Īsslēgums kādā no fāzēm

5.11.c attēla shēmā  $C$  fāzē ir īsslēgums (t. i., šīs fāzes pretestība  $Z_C$  ir vienāda ar nulli). Topogrāfiskā diagramma parādīta 5.11.d attēlā. Shēmas punkti  $n$  un  $C$  tagad savienoti, tiem ir vienādi potenciāli, tāpēc diagrammā tie sakrīt. Redzam, ka spriegums uz  $C$  fāzes ir vienāds ar nulli, bet spriegumi uz abām pārējām fāzēm palielinās 1,73 reizes – kļūst vienādi ar līnijas spriegumu. Vēl viena ilustrācija neitrālvada nozīmei – **četrvadu sistēmā**, kas ir katrā dzīvojamā namā, avarējušī fāze (teiksim, vienas dzīvokļu grupas patērētāji) tiktu atslēgta, bet režīms patērētāja pārējās divās fāzēs nemainītos.



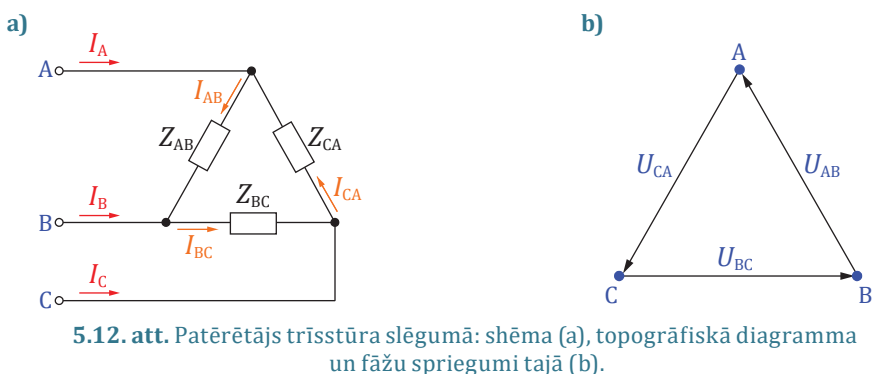
5.11. att. Patērētāja shēma un topogrāfiskā diagramma avārijas režīmos: fāzes pārtraukuma gadījumā (a, b), īsslēgumā (c, d).

### Trīsfāžu patērētājs trīsstūra slēgumā

Spriegumu skaita ziņā trīsstūra slēgums (5.12.a att.) ir vienkāršāks nekā zvaigznes slēgums, jo patērētājam ir tikai trīs punkti:  $A$ ,  $B$  un  $C$ . Katrai no fāzēm tieši pievadīts līnijas spriegums, tātad patērētāju fāžu pretestību izmaiņas šos spriegumus ietekmēt nevar. Toties strāvu skaits ir ievērojami lielāks: trīs fāžu strāvas un trīs līnijas strāvas. Patērētāja fāžu pretestības te apzīmē ar  $Z_{AB}$ ,  $Z_{BC}$  un  $Z_{CA}$ , patērētāja fāžu strāvas – ar tiem pašiem indeksiem:  $I_{AB}$ ,  $I_{BC}$  un  $I_{CA}$ . Līnijas strāvas apzīmē kā parasti:  $I_A$ ,  $I_B$  un  $I_C$ . Patērētāja vektoru diagrammu zīmēsim, vadoties pēc iepriekš lietotā plāna (**patērētāja topogrāfiskā diagramma; fāžu spriegumi; fāžu strāvas; pārējās strāvas**).

Tā kā topogrāfiskā diagramma un tajā esošie fāžu spriegumi ir parādīti jau iepriekš (5.5.a att., tas pats arī 5.12.b att.), tad atliek topogrāfisko un vektoru diagrammu papildināt ar fāžu strāvu vektoriem un, tos saskaitot saskaņā ar strāvu vienādojumiem (5.4), atrast līnijas strāvu vektorus:

$$\bar{I}_A = \bar{I}_{AB} - \bar{I}_{CA}; \quad \bar{I}_B = \bar{I}_{BC} - \bar{I}_{AB}; \quad \bar{I}_C = \bar{I}_{CA} - \bar{I}_{BC}.$$



5.12. att. Patērētājs trīsstūra slēgumā: shēma (a), topogrāfiskā diagramma un fāžu spriegumi tajā (b).

### Nesimetrisks patērētājs

Sāksim ar vispārīgāku gadījumu, kad patērētājs ir nesimetrisks, t. i, tā fāžu pretestības nav vienādas. Lai padarītu ērtākas turpmākās darbības ar strāvu vektoriem, vispirms no patērētāja topogrāfiskās diagrammas (5.12.b att.) fāžu spriegumu vektorus pārnesam uz topogrāfisko un vektoru diagrammu tā, lai tie izietu no viena punkta (5.13.a att.).

Fāžu strāvu efektīvās vērtības atrod, izdalot fāzes sprieguma  $U_f$  (kas vienāds ar līnijas spriegumu  $U$ ) efektīvo vērtību ar fāzes pilno pretestību:

$$I_{AB} = \frac{U_f}{Z_{AB}}; \quad I_{BC} = \frac{U_f}{Z_{BC}}; \quad I_{CA} = \frac{U_f}{Z_{CA}}.$$

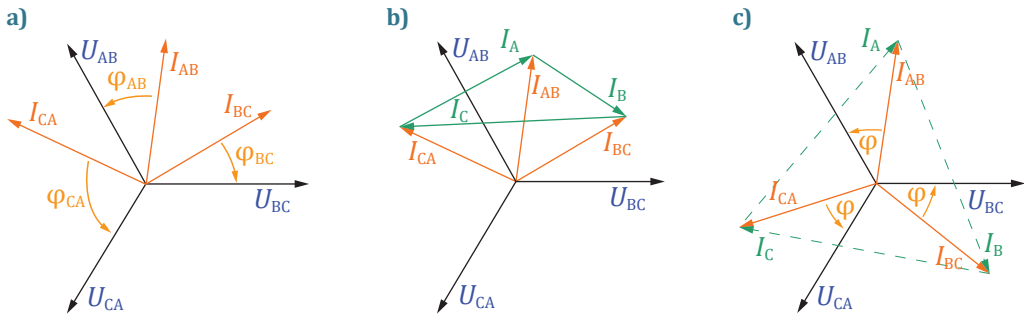
Fāžu strāvu vektori būs nobīdīti attiecībā pret fāžu spriegumiem attiecīgi par leņķi  $\varphi_{AB}$ ,  $\varphi_{BC}$ ,  $\varphi_{CA}$ , ko nosaka fāžu pretestību vērtības un raksturs. Turpinot zīmēt topogrāfisko un vektoru diagrammu, to papildina ar fāžu strāvu  $I_{AB}$ ,  $I_{BC}$ ,  $I_{CA}$  vektoriem. Fāžu strāvu vērtības un nobīdes leņķi te izvēlēti patvaļīgi (5.13.a att.), pieņemot, ka AB un CA fāzēs patērētājiem ir induktīvs raksturs ( $\varphi > 0^\circ$ ), bet BC fāzē – kapacitīvs raksturs ( $\varphi < 0^\circ$ ). Diagrammu pabeidz, atrodot līnijas strāvu vektorus (5.13.b att.). Katra līnijas strāva ir divu fāžu strāvu vektoru starpība (5.4). To viegli atrast, ja visi trīs fāžu strāvu vektori sākas kopējā punktā. Tad atliek tikai savienot abu fāžu strāvu vektoru galapunktus, kā tas redzams 5.13.b, c attēlā, un pārbaudīt līnijas strāvu vektoru virzienus pēc (5.4).

### Simetrisks patērētājs

Simetriska patērētāja gadījumā fāžu pretestības ir vienādas pēc lieluma:  $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA}$ , un rakstura:  $\varphi_{AB} = \varphi_{BC} = \varphi_{CA} = \varphi$ . Vektoru diagramma (5.13.c att.) atšķiras no iepriekš aplūkotās (5.13.b att.) ar to, ka fāžu strāvu vektori ir vienāda garuma un vienādi nobīdīti pret attiecīgo fāzes spriegumu. Trīsstūrī, ko veido divu fāžu strāvu ( $I_{AB}$  un  $I_{BC}$ ) vektori un līnijas strāvas  $I_B$  vektors, leņķis starp fāzes strāvu vektoriem ir  $120^\circ$ . Zinot to, var iegūt sakarību starp fāzes un līnijas strāvām:

$$I_1 = \sqrt{3}I_f. \tag{5.5}$$

Šī sakarība ir spēkā tikai trīsstūrī slēgtam **simetriskam** patērētājam.



**5.13. att.** Trīsstūrī slēgta patērētāja vektoru diagramma: spriegumi un fāžu strāvas (a), parādītas arī līnijas strāvas (b), speciālgadījums – vektoru diagramma simetriskam patērētājam (c).

### Simetriska trīsfāžu patērētāja aktīvā jauda

Atsevišķas fāzes aktīvo jaudu nosaka pēc formulas (3.7), piemēram, zvaigznē slēgtam patērētājam:

$$P_A = U_{An} I_A \cos \varphi_A; \quad P_B = U_{Bn} I_B \cos \varphi_B; \quad P_C = U_{Cn} I_C \cos \varphi_C.$$

Trīsfāžu patērētāja aktīvā jauda ir vienāda ar atsevišķo fāžu aktīvo jaudu summu:

$$P = P_A + P_B + P_C.$$

Bieži lietojami trīsfāžu patērētāji ir, piemēram, maiņstrāvas elektriskās mašīnas: asinhronzinēji un sinhronzinēji. Izrādās, ka simetriskam trīsfāžu patērētājam neatkarīgi no slēguma veida (zvaigznē vai trīsstūrī) var lietot vienu un to pašu aktīvās jaudas formulu. Lūk, tās izvedums zvaigznē slēgtam simetriskam patērētājam:

$$P = P_A + P_B + P_C = 3P_f = 3U_f I_f \cos \varphi = 3 \frac{U_1 I_1}{\sqrt{3}} \cos \varphi = \sqrt{3} U_1 I_1 \cos \varphi.$$

Pārveidojumos izmantota sakarība starp zvaigznē slēgta simetriska patērētāja līnijas un fāzes spriegumiem, ievērojot to, ka visu fāžu patērētās jaudas ir vienādas. To pašu rezultātu iegūst arī trīsstūrī slēgta patērētāja gadījumā, kad vienādi ir līnijas un fāzes spriegumi, bet līnijas strāvas vērtība ir  $\sqrt{3}$  reizes lielāka par fāzes strāvas vērtību (5.5):

$$P = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA} = 3P_f = 3U_f I_f \cos \varphi = 3 \frac{U_1 I_1}{\sqrt{3}} \cos \varphi = \sqrt{3} U_1 I_1 \cos \varphi.$$

Tehniskajā literatūrā **simetriska trīsfāžu patērētāja aktīvās jaudas formula** parasti pieejama šādā formā:

$$P = \sqrt{3} UI \cos \varphi, \tag{5.6}$$



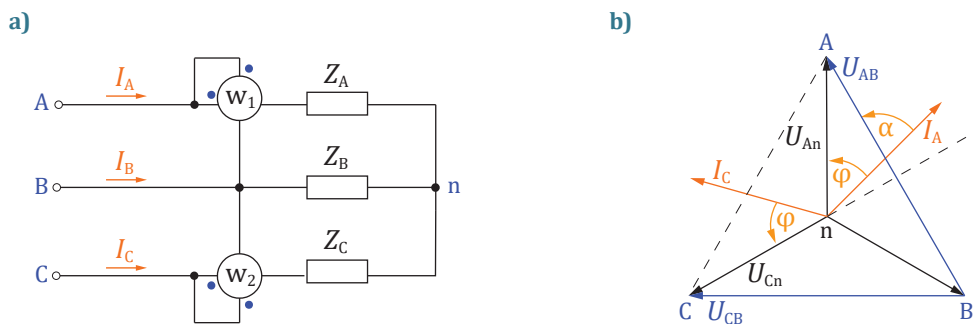
kur  $U, I$  – līnijas (ne fāzes) sprieguma un strāvas efektīvā vērtība,  $\cos\varphi$  – jaudas koeficients, ko nosaka patērētāja fāzes pretestība. Turklāt pastāv vienošanās: ja trīsfāžu ķēdes sprieguma vai strāvas apzīmējums nesatur indeksu “f” vai “l”, tad ar to ir domāts **līnijas** spriegums vai strāva. Arī trīsfāžu elektrisko mašīnu katalogos dota līnijas (nevis fāzes) sprieguma un strāvas efektīvā vērtība.

### Trīsfāžu patērētāja aktīvās jaudas mērīšana

Principā trīsfāžu patērētāja patērēto aktīvo jaudu  $P$  var izmērīt, izmantojot **trīs vatmetrus**: katru vatmetru ieslēdz vienas fāzes jaudas mērīšanai. Vatmetru strāvas spoles ieslēdz tā, lai tajās plūstu fāžu strāvas, bet spriegumu spoles pieslēdz fāžu spriegumiem. Patērētāja aktīvo jaudu atrod kā trīs vatmetru rādījumu summu.

**Ja patērētājs ir simetrisks**, tad pietiek ar vienu vatmetru: tas izmēra vienas fāzes jaudu un kopējo jaudu iegūst, mērījuma rezultātu pareizinot ar trīs. Tiesa, patērētāja neitrālei  $n$  tad jābūt pieejamai. Pretējā gadījumā izveido mākslīgu neitrāli  $n$ , savienojot zvaigznē trīs vienādas pretestības (viena no tām var būt vatmetra sprieguma spoles pretestība).

Visai izplatīta ir **divu vatmetru metode**. Tā gan ir piemērota **tikai trīs vadu sistēmai**, t. i., ja patērētājs pievienots avotam, neizmantojot neitrālvadu. Taču tā ir derīga patērētāja zvaigznes un trīsstūra slēgumam neatkarīgi no tā, vai patērētājs ir simetrisks vai nesimetrisks.



**5.14. att.** Jaudas mērīšana, izmantojot vatmetru metodi: shēma (a), topogrāfiskā un vektoru diagramma simetriska patērētāja gadījumā (b).

Divu vatmetru metodes īpatnība ir tā, ka nevienam no abu vatmetru rādījumiem neatbilst kāda konkrēta jauda, taču abu rādījumu algebriskā summa ir trīsfāžu patērētāja aktīvā jauda.

Lai uzzinātu, kā jāpieslēdz abu vatmetru strāvas un sprieguma ķēdes, aplūkosim shēmu ar zvaigznē slēgtu patērētāju (5.14a att.). Izmantojot pēc formulas (5.2) uzrakstītu strāvu vienādojumu:

$$i_B = -i_A - i_C,$$

kas ir pareizs tikai trīs vadu, bet **ne četrvadu sistēmai**, trīsfāžu patērētāja momentānās jaudas izteiksmi iespējams pārveidot par divu reizinājumu summu:

$$p = p_A + p_B + p_C = u_{An}i_A + u_{Bn}i_B + u_{Cn}i_C = i_A(u_{An} - u_{Bn}) + i_C(u_{Cn} - u_{Bn}) = i_A u_{AB} + i_C u_{CB}.$$

Pēdējā izteiksme rāda, kā jāpieslēdz abi vatmetri: to strāvas ķēdes ieslēdz līnijas vadus A un C, bet sprieguma ķēdes pieslēdz attiecīgi spriegumam  $U_{AB}$  un  $U_{CB}$  (5.14.a att.) Atcerēsimies, ka vatmetrs rāda strāvas un sprieguma momentāno vērtību reizinājuma (šeit  $i_A u_{AB}$  un  $i_C u_{CB}$ ) vidējo vērtību. Savukārt aktīvā jauda  $P$  ir momentānās jaudas  $p$  vidējā vērtība. Tas nozīmē, ka abu **vatmetru rādījumu algebriskā summa** ir vienāda ar trīsfāžu patērētāja aktīvo jaudu  $P$ .

Līdzīgi varētu parādīt, ka šāds vatmetru slēgums pareizi uzrādītu trīsfāžu patērētāja aktīvo jaudu arī tad, ja patērētājs būtu slēgts trīsstūrī.

Visbiežāk sastopamais simetriskais trīsfāžu patērētājs – asinhronzinējs – patērē aktīvo jaudu, kā arī induktīva rakstura reaktīvo jaudu magnētiskā lauka radīšanai. Mainot dzinēja mehānisko slodzi (momentu  $M$ ), patērētā aktīvā jauda un arī fāžu nobīde mainās plašās robežās. Divu vatmetru metode ļauj arī **netieši novērtēt** dzinēja jaudas koeficientu  $\cos\varphi$ .

5.14.b attēlā parādīta zvaigznē slēgta asinhronzinēja topogrāfiskā un vektoru diagramma, kurā izcelti spriegumi  $U_{AB}$  un  $U_{CB}$ , no kuriem atkarīgi vatmetru rādījumi. Līnijas strāvas  $I_A$  un  $I_C$  vienlaicīgi ir arī fāžu strāvas. Tāpēc to vektori atpaliek par leņķi  $\varphi$  no **fāžu spriegumu** ( $U_{An}$  un  $U_{Cn}$ ) vektoriem.

Topogrāfiskajā un vektoru diagrammā redzams: ja  $\varphi = 60^\circ$ , leņķis starp vektoru  $\vec{U}_{AB}$  un  $\vec{I}_A$  (5.14.b att.)  $\alpha = 90^\circ$  un pirmā vatmetra rādījums ( $U_{AB} I_A \cos\alpha$ ) ir vienāds ar nulli. 5.14.b attēlā redzama situācija, kad  $\varphi < 60^\circ$ , – tad leņķis  $\alpha$  ( $\vec{U}_{AB}; \vec{I}_A$ ) ir šaurš un vatmetra rādījums ir pozitīvs. Turpretī, ja patērētājs darbojas ar zemāku jaudas koeficientu ( $\varphi > 60^\circ$ ), tad šī vatmetra rādījums ir negatīvs. Uzmanīgi aplūkojot diagrammu (5.14.b att.), redzēsim, ka, mainoties fāžu nobīdei ( $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ ), leņķis, ko veido vektors  $\vec{U}_{CB}$  (nevis  $\vec{U}_{BC}$ ) un  $\vec{I}_C$ , vienmēr paliek šaurš. Tāpēc otrā vatmetra rādījums vienmēr paliek pozitīvs.

## Trīsfāžu patērētāja aprēķina piemēri

Simetriska trīsfāžu patērētāja aprēķina piemēri

### 5.1. piemērs

Aprēķināt strāvu vērtības un patērēto aktīvo jaudu, ja patērētājs slēgts zvaigznes slēgumā (5.9. att.).

Dots: līnijas spriegums  $U_l = 380$  V; simetriska patērētāja fāzes pretestība  $Z = 20$   $\Omega$ ; patērētājs ir aktīvi induktīva rakstura, tā pretestību attiecība atbilst fāžu nobīdei  $\varphi = 30^\circ$ .

### Atrisinājums

Simetriska patērētāja topogrāfiskajā un vektoru diagrammā (neatkarīgi no tā, vai neitrālvads ir vai nav) patērētāja neitrāle atrodas simetrijas centrā (5.8. att.), un visi patērētāja fāžu spriegumi ir vienādi:

$$U_f = \frac{U_1}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 219,4 \text{ V.}$$

Simetriska patērētāja visu fāžu strāvas (zvaigznes slēgumā tās ir arī līnijas strāvas) ir vienādas, to efektīvā vērtība:

$$I_f = I_1 = \frac{U_f}{Z} = \frac{219,4}{20} = 11 \text{ A.}$$

Patērēto aktīvo jaudu aprēķinām saskaņā ar simetriska trīsfāžu patērētāja jaudas formulu (5.6):

$$P = \sqrt{3}U_1 I_1 \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 11 \cdot 0,866 = 6270 \text{ W.}$$

## 5.2. piemērs

Aprēķināt strāvas un patērēto aktīvo jaudu, ja iepriekšējā piemēra trīsfāžu patērētāju, kas paredzēts darbam ar 380 V līnijas spriegumu zvaigznes slēgumā, darbinātu ar trīsstūrī savienotām fāzēm (5.12.a att.). Salīdzināt patērētās jaudas vērtību trīsstūra un zvaigznes slēgumā.

### Atrisinājums

Lai aprēķinātu patērētāja fāzes strāvu, jāuzzina patērētāja fāzes spriegums. Trīsstūra slēgumā tas ir vienāds ar līnijas spriegumu  $U_1$ :

$$U_f = U_1 = 380 \text{ V.}$$

Tagad patērētāja fāzes sprieguma (tātad arī fāzes strāvas vērtība) ir 1,73 reizes lielāka nekā zvaigznes slēgumā:

$$I_f = \frac{U_f}{Z} = \frac{380}{20} = 19 \text{ A.}$$

Redzam, ka trīsstūrī slēgta simetriska patērētāja gadījumā līnijas strāvas vērtība ir 3 reizes lielāka nekā tad, ja šis patērētājs būtu slēgts zvaigznē:

$$I_1 = \sqrt{3}I_f = \sqrt{3} \cdot 19 = 33 \text{ A.}$$

Simetriska patērētāja jaudas formula trīsstūra un zvaigznes slēgumam ir viena un tā pati (5.6). Saskaņā ar uzdevuma noteikumiem līnijas spriegums abos gadījumos ir viens un tas pats. Tātad, patērētāju savienojot trīsstūrī, jāaprēķinās ar to, ka ne tikai līnijas strāva, bet arī patērētāja jauda  $P$  pieaugs 3 reizes:

$$P = \sqrt{3}U_1 I_1 \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 33 \cdot 0,866 = 18810 \text{ W.}$$

Tas nozīmē, ka patērētājam, kas normāli paredzēts darbam zvaigznes slēgumā ar līnijas spriegumu 380 V, fāzes pie šī sprieguma nedrīkst savienot trīsstūra slēgumā, jo tad tajā izdalīsies 3 reizes lielāka jauda. Tādam režīmam šis patērētājs, protams, nav piemērots.

### 5.3 piemērs

Aprēķināsim iepriekšējos piemēros aplūkotā simetriskā patērētāja režīmu, ja tas slēgts trīsstūrī, bet darbojas ar pazeminātu spriegumu (tagad  $U = 220 \text{ V}$ ).

#### Atrisinājums

Patērētāja fāzes sprieguma, fāzes strāvas un līnijas strāvas vērtība jaunajos apstākļos:

$$U_f = U_1 = 220 \text{ V}; \quad I_f = \frac{U_f}{Z} = \frac{220}{20} = 11 \text{ A}; \quad I_l = \sqrt{3}I_f = \sqrt{3} \cdot 11 = 19 \text{ A.}$$

Salīdzinot šos un 5.1. piemēra (augstāks līnijas spriegums, bet patērētājs ir zvaigznes slēgumā) rezultātus, redzam, ka patērētāja fāze atrodas tieši tādos pašos apstākļos: fāzes lielumu vērtības abos gadījumos ir vienādas:  $U_f = 220 \text{ V}$  un  $I_f = 11 \text{ A}$ ! Katras fāzes un kopējā patērētā jauda šeit būs tāda pati kā iepriekšējā piemērā. Pārlicināsimies par to, izmantojot trīsfāžu simetriska patērētāja jaudas formulu (5.6):

$$P = \sqrt{3}U_1 I_1 \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot 19 \cdot 0,866 = 6270 \text{ W.}$$

Visos trīs piemēros tika izmantots viens un tas pats patērētājs, kura pasēs vai kataloga datos norādītās nominālās vērtības:  $\Delta/Y$ ;  $U = 220/380 \text{ V}$ ;  $I = 19/11 \text{ A}$ ;  $P = 6,3 \text{ kW}$ . Tas nozīmē, ka patērētāja fāzes jāsavieno trīsstūrī, ja līnijas spriegums tīklā ir 220 V, vai zvaigznē, ja līnijas spriegums ir 380 V. Pasēs datos uzrādītas arī līnijas strāvas  $I$  un aktīvās jaudas  $P$  vērtības nominālās slodzes režīmam.

5.1. un arī 5.3. piemērā patērētājs darbojas tam paredzētos apstākļos, bet 5.2. piemēra režīms nav pieļaujams, jo patērētā jauda trīskārt pārsniedz nominālo vērtību.

### Zvaigznē slēgta nesimetriska patērētāja aprēķina piemēri

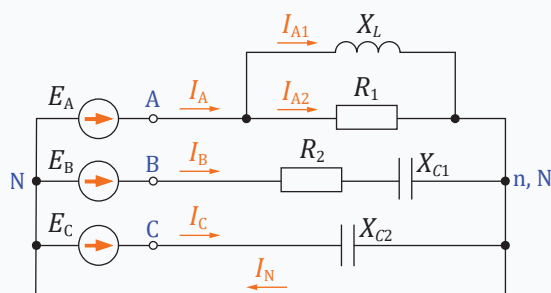
Aprēķinot zvaigznē slēgta nesimetriska trīsfāžu patērētāja režīmu, abu iespējamo gadījumu – ar neitrālvadu un bez tā – sarežģītības pakāpes ir dažādas. Taču jebkurā gadījumā darbību secība ir viena un tā pati: **patērētāja topogrāfiskā diagramma; fāžu spriegumi tajā; fāžu strāvas; pārējās strāvas**. Realizējot šo plānu, patērētāja fāžu spriegumus ir viegli atrast tikai tad, ja shēmā ir neitrālvads. Tad patērētāja topogrāfiskā diagramma ir tāda pati kā trīsfāžu ģeneratoram (5.2.b att.): visi fāžu spriegumi ir skaitliski vienādi un savstarpēji nobīdīti fāzē par  $120^\circ$ . Sistēmā bez neitrālvasda

patērētāja topogrāfiskajā diagrammā zināmi tikai trīs punkti, bet **patērētāja neitrāles n nobīde** (5.5.c att.) vēl jāatrod. Tikai pēc tam būs iespējams atrast patērētāja fāžu spriegumus un aprēķināt strāvas. Neitrāles nobīdes atrašana ir pietiekami sarežģīts uzdevums, tādēļ šim nolūkam lieto tikai simbolisko metodi.

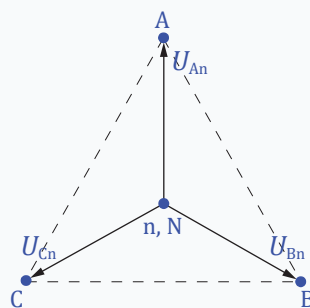
## 5.4. piemērs

Trīsfāžu avotu un zvaigznē slēgtu nesimetrisku patērētāju (5.15. att.) savieno četrvadu līnija (līnijas vadi A, B un C; neitrālvads N). Aprēķināt visas strāvas un patērēto aktīvo jaudu.

Dots: līnijas spriegums  $U = 220$  V; patērētāja A fāzē paralēlos zaros ir aktīvā un induktīvā pretestība:  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $X_L = 5 \Omega$ ; B fāzē virknē slēgta aktīvā un kapacitīvā pretestība:  $R_2 = 5 \Omega$ ,  $X_{C1} = 2 \Omega$ ; C fāzē ir kondensators, kura kapacitīvā pretestība  $X_{C2} = 3 \Omega$ .



5.15. att. Nesimetrisks patērētājs četrvadu sistēmā.



5.16. att. Patērētāja topogrāfiskā diagramma.

### Atrisinājums

Uzdevumu risināsim, izmantojot vektoru diagrammu metodi.

1. Četrvadu sistēmā **patērētāja topogrāfiskā diagramma** (5.5.b att.) atkārtoto ģenerators topogrāfisko diagrammu (5.2.c att.).
2. Patērētāja topogrāfiskajā diagrammā parādām **patērētāja fāžu spriegumus** (5.16. att.). Aprēķinām patērētāja fāzes spriegumu, kas ir vienāds ar ģenerators fāzes spriegumu (5.1):

$$U_f = \frac{U_1}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{3}} \approx 127 \text{ V.}$$

Tagad spriegums uz katras fāzes ir zināms, tāpēc nākamajā risinājuma posmā aprēķināsim trīs atsevišķas vienfāzes ķēdes. Trīsfāžu specifika no jauna parādīsies tikai risinājuma beigās, nosakot strāvu neitrālvadā.

3. Aprēķinām **fāžu strāvas** un to nobīdes leņķus attiecībā pret fāžu spriegumiem.
  - a) A fāzē ir divi **paralēli zari**. Kas jādara paralēlslēguma gadījumā? Atbilde: no 3. nodaļas zināms, ka tad jāzīmē vektoru diagramma (5.17. att.).

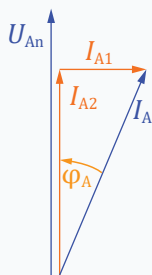
Vispirms patvaļīgi izvēlēta virzienā zīmē A fāzes sprieguma  $U_{An}$  vektoru. Strāvu vektoru virzienus nosaka tas, ka zarā ar rezistoru strāva  $I_{A2}$  sakrīt fāzē ar spriegumu, bet zarā ar induktīvu elementu strāva  $I_{A1}$  atpaliek fāzē no sprieguma par  $90^\circ$ . A fāzes strāvas  $I_A$  vektoru atrod, saskaņā ar strāvu vienādojumu (3.6) summējot zaru strāvu vektorus. Zaru strāvu vērtības atrod pēc elementu vienādojumiem (3.3) un (3.2):

$$I_{A1} = \frac{U_f}{X_L} = \frac{127}{5} = 25,4 \text{ A}; \quad I_{A2} = \frac{U_f}{R_1} = \frac{127}{2} = 63,5 \text{ A}.$$

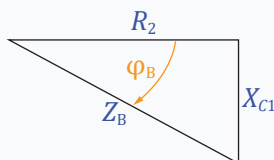
Uzzīmēto vektoru diagrammu (5.17. att.) izmanto, lai izveidotu formulu A fāzes strāvas atrašanai. **Šajā gadījumā** (bet ne vienmēr) zaru strāvu vektori veido taisnu leņķi, tāpēc formula būs šāda:

$$I_A = \sqrt{I_{A1}^2 + I_{A2}^2} = \sqrt{25,4^2 + 63,5^2} = 68,4 \text{ A}.$$

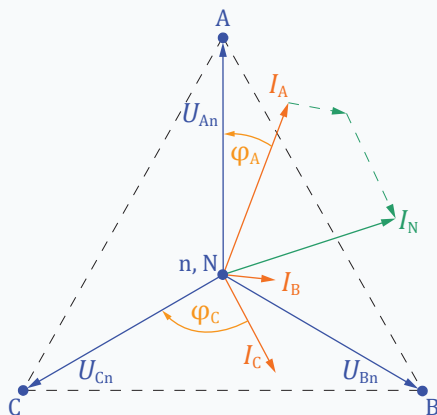
Kāda būtu diagramma, ja šīs fāzes zaros būtu induktīvā un kapacitīvā pretestība? Kāda tad būtu formula? Kāda būtu diagramma un formula fāzes strāvas atrašanai, ja fāzē būtu trīs zari un elementi  $R$ ,  $L$  un  $C$ ? Atbildes meklējamas 3. nodaļā.



5.17. att. Vektoru diagramma A fāzei.



5.18. att. Pretestību trīsstūris B fāzei.



5.19. att. Topogrāfiskā un vektoru diagramma.

- b) B fāzē elementi slēgti **virknē**. Šādā gadījumā slēguma pilno pretestību atrod **no pretestību trīsstūra** (5.18. att.):

$$Z_B = \sqrt{R_2^2 + X_{C1}^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = 5,4 \Omega.$$

Pretestību trīsstūrī leņķis  $\varphi_B$  ir negatīvs, jo reaktīvā pretestība ir kapacitīva. Šī leņķa skaitlisko vērtību arī atrod no pretestību trīsstūra – vienādojums (3.8a):

$$\varphi_B = \arcsin\left(\frac{X_L - X_C}{Z}\right) = \arcsin\left(\frac{0-5}{5,4}\right) = \arcsin(0,37) = -22^\circ.$$

B fāzes strāvas efektīvā vērtība:

$$I_B = \frac{U_f}{Z} = \frac{127}{5,4} = 23,6 \text{ A};$$

b) C fāzē ieslēgts kondensators, tāpēc strāva apsteidz fāzes spriegumu par  $90^\circ$ . Strāvas efektīvā vērtība:

$$I_C = \frac{U_f}{X_{C2}} = \frac{127}{3} = 42,3 \text{ A}.$$

Papildinām vektoru diagrammu ar aprēķināto fāžu strāvu vektoriem (5.19. att.), ievērojot, kā katrs no tiem nobīdīts fāzē attiecībā pret savas fāzes spriegumu. Tā kā diagrammu lietosim vektoru saskaitīšanai, tad strāvas vektorus zīmē mērogā.

4. Strāvu neitrālavadā atrod, izmantojot strāvu vienādojumu mezglam n (5.3):

$$\vec{I}_N = \vec{I}_A + \vec{I}_B + \vec{I}_C.$$

Vienādojumā, protams, nedrīkst ievietot skaitļus, jo jāsaskaita taču trīs strāvu **sinusoīdas**, un to realizē, summējot vektorus. Ja diagramma uzzīmēta mērogā, tad neitrāles strāvas vērtību aptuveni var noteikt, izmērot vektora  $\vec{I}_N$  garumu, kam atbilst strāvas  $I_N$  efektīvā vērtība 74 A.

Lai gan vektoru diagramma uzzīmēta aptuveni, arī no tās varētu iegūt precīzu neitrālvasda strāvas vērtību. Ideja ir šāda. Visu strāvu vektoru virzieni ir zināmi precīzi, jo zināmi fāžu spriegumu virzieni un visi fāžu nobīdes leņķi. Izvēlas koordinātu asis – divus savstarpēji perpendikulārus virzienus. Atrod visu trīs fāžu strāvu vektoru projekcijas uz vienas no šīm asīm. Saskaitot (algebriski) šīs projekcijas, iegūst strāvas  $I_N$  vektora vienu projekciju. Līdzīgi atrod arī tā otru projekciju. Uzskatot abas projekcijas par taisnleņķa trīsstūra katetēm, strāvu  $I_N$  atrod kā šī trīsstūra hipotenūzu.

5. Patērēto aktīvo jaudu atradīsim, summējot visu trīs fāžu aktīvās jaudas vērtības. Aprēķinā parādīts, ka aktīvo jaudu (to patērē tikai rezistīvie elementi) var aprēķināt arī kā rezistīvā elementa strāvas un sprieguma (ja tas zināms) reizinājumu vai strāvas kvadrāta un aktīvās pretestības vērtības reizinājumu:

$$P_A = U_f I_A \cos \varphi_A = U_f I_{A2} = 127 \cdot 63,5 = 8065 \text{ W};$$

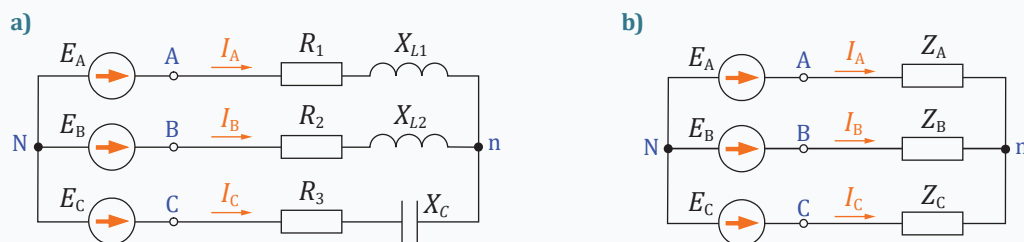
$$P_B = U_f I_B \cos \varphi_B = R_2 I_B^2 = 127 \cdot 23,6 \cdot 0,93 = 5 \cdot 23,6^2 = 2790 \text{ W};$$

$$P_C = 0 \text{ W};$$

$$P = P_A + P_B + P_C = 8065 + 2780 + 0 = 10\,845 \text{ W}.$$

## 5.5. piemērs

5.20. attēlā parādīta trīsvadu sistēma ar zvaigznē slēgtu nesimetrisku patērētāju. Aprēķināt visas strāvas un patērēto aktīvo jaudu.



5.20. att. Zvaigznē slēgts patērētājs trīsvadu sistēmā (a), aizvietošanas shēma ar kompleksām pretestībām (b).

Zvaigznē slēgts nesimetrisks patērētājs bez neitrālvada ir vienīgais gadījums, kad topogrāfiskajā diagrammā parādās neitrāles nobīde. Neitrāles nobīdes un patērētāja fāžu spriegumu noteikšanai jālieto simboliskā metode. Lai kontrolētu risinājuma gaitu, izmantosim arī vektoru diagrammu metodes principus.

Dots: līnijas spriegums  $U = 220$  V; patērētāja A fāzē ir virknē slēgta aktīvā un induktīvā pretestība:  $R_1 = 30 \Omega$  un  $X_{L1} = 40 \Omega$ ; līdzīgi B fāzē:  $R_2 = 50 \Omega$ ,  $X_{L2} = 35 \Omega$ ; C fāzē ir aktīvā pretestība  $R_3 = 40 \Omega$  un kondensators, kura kapacitīvā pretestība  $X_C = 20 \Omega$ .

### Atrisinājums

1. Izveidojam aizvietošanas shēmu (5.20.b att.), aizstājot katru elementu vai elementu virknes slēgumu ar komplekso pretestību. Fāžu komplekso pretestību vērtības:

$$\underline{Z}_A = R_1 + jX_L = (30 + j40) \Omega, \quad \underline{Z}_B = R_2 + jX_{L2} = (50 + j35) \Omega, \quad \underline{Z}_C = R_3 - jX_C = (40 - j20) \Omega.$$

2. Lai pareizi aizstātu ģenerators EDS ar tā komplekso lielumu, labi jāpārzina trīsfāžu ģenerators **topogrāfiskā diagramma** (5.2.b, c att.). Ievērojot, ka ģenerators EDS un tā fāžu spriegumiem ir vienādi (5.2.a att.), varam atrast to skaitlisko vērtību:

$$E = U_f = \frac{U_1}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{3}} \approx 127 \text{ V}.$$

Tāda būs visu trīs fāžu komplekso EDS moduļa vērtība. EDS izteiksmēs jāparāda, ka tie savstarpēji nobīdīti fāzē par  $120^\circ$ . Pieņemot, ka A fāzes EDS sākumfāzē ir  $0^\circ$ :

$$\underline{E}_A = 127 \text{ V},$$

un zinot, ka, piemēram, B fāzes EDS atpaliiek fāzē par  $120^\circ$ , uzrakstām visu komplekso EDS izteiksmes:



$$\underline{E}_B = 127 e^{-j120^\circ} = 127(\cos 120^\circ - j\sin 120^\circ) = (-63,5 - j110) \text{ V};$$

$$\underline{E}_C = 127 e^{j120^\circ} = 127(\cos 120^\circ + j\sin 120^\circ) = (-63,5 + j110) \text{ V}.$$

Atrodiet šos EDS komplekso skaitļu plaknē (5.21. att.). Ar ko šī diagramma atšķiras no 5.2.a attēla diagrammas? Atbilde: tā tagad pagriezta par  $90^\circ$ , kam gan principiālas nozīmes nav.

3. Dati aizvietošanas shēmai (5.20.b att.) sagatavoti. Aprēķina pirmais posms jau aplūkots 4. nodaļā (4.5. piemērs). Izmantojot mezglu spriegumu metodi (2.10), vispirms atrodam neitrāles nobīdi: spriegumu stap patērētāja neitrāli n un avota neitrāli N:

$$\begin{aligned} U_{nN} &= \frac{E_A/Z_A + E_B/Z_B + E_C/Z_C}{1/Z_A + 1/Z_B + 1/Z_C} = \\ &= \frac{127/(30 + j40) + (-63,5 - j110)/(50 + j35) + (-63,5 + j110)/(40 - j20)}{1/(30 + j40) + 1/(50 + j35) + 1/(40 - j20)} = \\ &= \frac{-2,732 - j1,347}{0,0454 - j0,0154} = (-44,9 - j44,9) \text{ V}. \end{aligned}$$

Atliekam aprēķināto komplekso spriegumu  $\underline{U}_{nN}$  komplekso skaitļu plaknē (5.21.a att.). Koordinātu sākumpunkts N un visu četru vektoru galapunkti (A, B, C un n) veido shēmas topogrāfisko diagrammu. Fāžu spriegumu  $\underline{U}_{An}$ ,  $\underline{U}_{Bn}$  un  $\underline{U}_{Cn}$  vektori veidojas, savienojot attiecīgos diagrammas (5.21.a att.) punktus (atcerieties: bultiņa vērsta "uz pirmo indeksu").

4. Aprēķinām fāžu spriegumus, izmantojot **spriegumu vienādojumu** (4.5) un EDS vienādojumu (4.1):

$$\underline{U}_{An} = \underline{U}_{AN} + \underline{U}_{Nn} = \underline{E}_A - \underline{U}_{nN} = 127 - (-44,9 - j44,9) = (171,9 + j44,9) \text{ V};$$

$$\underline{U}_{Bn} = \underline{U}_{BN} + \underline{U}_{Nn} = \underline{E}_B - \underline{U}_{nN} = -63,5 - j110 - (-44,9 - j44,9) = (-18,6 - j65,1) \text{ V};$$

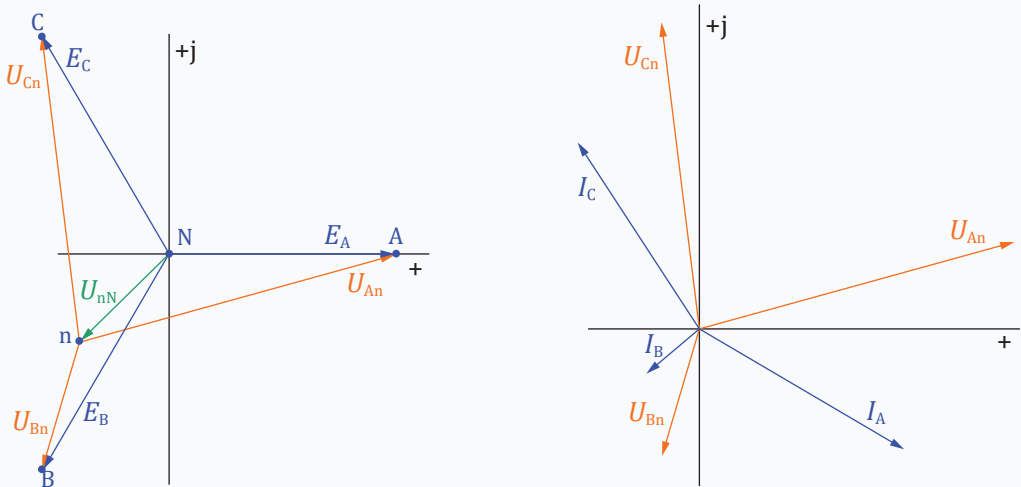
$$\underline{U}_{Cn} = \underline{U}_{CN} + \underline{U}_{Nn} = \underline{E}_C - \underline{U}_{nN} = -63,5 + j110 - (-44,9 - j44,9) = (-18,6 + j154,9) \text{ V}.$$

Aplūkojiet komplekso skaitļu plaknē uzzīmēto topogrāfisko diagrammu (5.21.a att.) un pārbaudiet, vai iegūtie rezultāti atbilst fāžu spriegumu vektoru virzieniem.

Spriegumu efektīvās vērtības ir komplekso spriegumu moduļi:

$$U_{An} = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\underline{U}_{An}) + \operatorname{Im}^2(\underline{U}_{An})} = \sqrt{171,9^2 + 44,9^2} = 177,7 \text{ V}.$$

Līdzīgi atrod pārējo fāžu spriegumus un neitrāles nobīdi:  $U_{Bn} = 67,7 \text{ V}$ ,  $U_{Cn} = 156 \text{ V}$ ,  $U_{nN} = 63,5 \text{ V}$ .



5.21. att. Topogrāfiskā diagramma komplekso skaitļu plaknē (a), fāžu spriegumu un strāvu vektoru diagramma (b).

5. Tagad zināmi spriegumi uz visām fāžu pretstībām un pēc formulas (4.2) varam aprēķināt kompleksās fāžu strāvas:

$$\underline{I}_A = \frac{U_{An}}{Z_A} = \frac{171,9 + j44,9}{30 + j40} = (2,78 - j2,21) \text{ A};$$

$$\underline{I}_B = \frac{U_{Bn}}{Z_B} = \frac{-18,6 - j65,1}{50 + j35} = (-0,86 - j0,70) \text{ A};$$

$$\underline{I}_C = \frac{U_{Cn}}{Z_C} = \frac{-18,6 + j154,9}{40 - j20} = (-1,92 + j2,91) \text{ A}.$$

Attēlojot aprēķinātos fāžu spriegumus un strāvas komplekso skaitļu plaknē, iegūstam vektoru diagrammu (5.21.b att.).

Vektoru diagrammu ieteicams zīmēt līdztekus aprēķinam. Vektoru diagrammu metodes paņēmieni noder, kontrolējot iegūto rezultātu pareizību. Piemēram, uzskicējot A fāzes pretstību trīsstūrī, varam novērtēt, ka  $\varphi_A \approx 50^\circ$ . Pārbaudām, vai strāva  $I_A$  diagrammā tiešām atpaliek no sprieguma  $U_{An}$  par šādu leņķi. Savukārt C fāzes pretstību trīsstūrī saskaņā ar (3.8a)  $\varphi_C = \arctg(-X_C/R_3) = -26,6^\circ$  – tātad  $I_C$  apsteidz fāzē spriegumu  $U_{cn}$  par  $26,6^\circ$  utt.

Aprēķinām kompleksās strāvas moduli – tas ir attiecīgās fāzes strāvas efektīvā vērtība:

$$I_A = \sqrt{\text{Re}^2(I_A) + \text{Im}^2(I_A)} = \sqrt{2,78^2 + 2,21^2} = 3,55 \text{ A}.$$

Līdzīgi atrod pārējo fāžu strāvu efektīvās vērtības:  $I_B = 1,11 \text{ A}$  un  $I_C = 3,49 \text{ A}$ . Izmantosim uzzīmēto vektoru diagrammu, lai pavigrinātos pārejai uz komplekso strāvu eksponenciālo formu  $(Ae^{j\alpha})$ .

Strāvai A fāzē:

$$\alpha_A = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\operatorname{Im}(\underline{I}_A)}{\operatorname{Re}(\underline{I}_A)} \right] = \operatorname{arctg} \left[ \frac{-2,21}{2,78} \right] = -38,5^\circ.$$

Strāvai B fāzē:

$$\alpha_B = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\operatorname{Im}(\underline{I}_B)}{\operatorname{Re}(\underline{I}_B)} \right] = \operatorname{arctg} \left[ \frac{-0,70}{-0,86} \right] = 50,9^\circ + 180^\circ = 230,9^\circ.$$

**Uzmanību!** Ja kompleksais skaitlis atrodas komplekso skaitļu plaknes II vai III kvadrantā (t. i., tā reālā daļa ir negatīva), tad ar arktangensa formulu iegūtais rezultāts jākorrigē, tam pieskaitot  $180^\circ$ . Tas arī jāievēro, nosakot argumentu  $\alpha$  strāvai  $I_C$ , spriegumiem  $U_{Bn}$ ,  $U_{Cn}$  un  $U_{nN}$ .

Strāvai C fāzē:

$$\alpha_C = \operatorname{arctg} \left[ \frac{2,91}{-1,92} \right] = -56,5^\circ + 180^\circ = 123,5^\circ.$$

A fāzes spriegumam:

$$\alpha_{An} = \operatorname{arctg} \left[ \frac{44,9}{171,9} \right] = 14,6^\circ.$$

$\underline{U}_{An}$  atrodas I kvadrantā – korekcija nav vajadzīga.

B fāzes spriegumam:

$$\alpha_{Bn} = \operatorname{arctg} \left[ \frac{-65,1}{-18,6} \right] = 74,15^\circ + 180^\circ = 254,1^\circ.$$

C fāzes spriegumam:

$$\alpha_{Cn} = \operatorname{arctg} \left[ \frac{154,9}{-18,6} \right] = -83,2^\circ + 180^\circ = 96,8^\circ.$$

Neitrāles nobīdes spriegumam:

$$\alpha_{nN} = \operatorname{arctg} \left[ \frac{-44,9}{-44,9} \right] = 45^\circ + 180^\circ = 225^\circ.$$

Zinot komplekso lielumu modulūsus un argumentus (leņķus), uzrakstām spriegumu un strāvu izteiksmes eksponenciālā formā:

$$\underline{U}_{An} = 177,7e^{j14,6^\circ} \text{ V}; \quad \underline{U}_{Bn} = 67,7e^{j254,1^\circ} \text{ V}; \quad \underline{U}_{Cn} = 156e^{j96,8^\circ} \text{ V}; \quad \underline{U}_{nN} = 63,5e^{j225^\circ} \text{ V};$$

$$\underline{I}_A = 3,55e^{j(-38,5^\circ)} \text{ A}; \quad \underline{I}_B = 1,11e^{j230,9^\circ} \text{ A}; \quad \underline{I}_C = 3,49e^{j123,5^\circ} \text{ A}.$$

Eksponenciālo formu lieto reti, jo algebriskajā formā iespējams veikt visas vajadzīgās darbības ar kompleksajiem skaitļiem. Ja divu lielumu eksponenciālā forma ir pieejama, tajā ērti veikt to reizināšanu (argumentus saskaita) un dalīšanu (atrod argumentu starpību). Viegli saskatāma šo lielumu fāžu nobīde – tā ir argumentu starpība. Piemēram, fāžu nobīde A fāzē:  $\varphi_A = \alpha_{An} - \alpha_A = 14,6^\circ - (-38,5^\circ) = 53,1^\circ$ .

6. Aprēķinām patērētāja katras fāzes un kopējo patērēto jaudu:

$$\underline{S}_A = \underline{U}_{An} \underline{I}_A^* = (171,9 + j44,9)(2,78 + j2,21) = (378,9 + j505,2) \text{ VA};$$

$$\underline{S}_B = \underline{U}_{Bn} \underline{I}_B^* = (-18,6 - j65,1)(-0,861 + j0,70) = (61,5 + j43,1) \text{ VA};$$

$$\underline{S}_C = \underline{U}_{Cn} \underline{I}_C^* = (-18,6 + j154,9)(-1,92 - j2,91) = (486,7 - j243,3) \text{ VA};$$

$$\underline{S} = \underline{S}_A + \underline{S}_B + \underline{S}_C = 378,9 + j505,2 + 61,5 + j43,1 + 486,7 - j243,3 = (927,1 - j305) \text{ VA}.$$

Aktīvā jauda  $P$  ir kompleksās jaudas  $\underline{S}$  reālā daļa. Tātad patērētāja A fāzes aktīvā jauda  $P_A = 378,9 \text{ W}$ , B un C fāze patērē attiecīgi  $P_B = 61,5 \text{ W}$  un  $P_C = 486,7 \text{ W}$ . Kopējā patērētā aktīvā jauda ir  $927,1 \text{ W}$ . Rezultātu pareizību visvienkāršāk pārbaudīt šādi. Aktīvo jaudu patērē tikai rezistīvie elementi. Katram no tiem aktīvo jaudu var atrast, sareizinot tā pretestību ar strāvas efektīvās vērtības kvadrātu:  $P = RI^2$ .

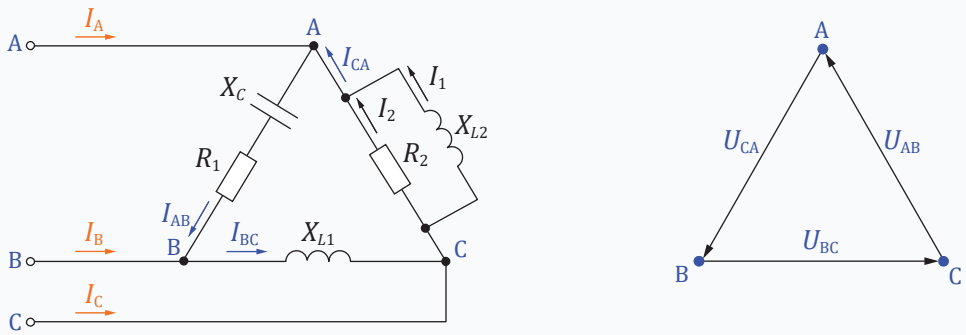
Trīsstūrī slēgta nesimetriska patērētāja aprēķina piemēri

Trīsstūra slēgums spriegumu ziņā ir vienkāršāks nekā zvaigznes slēgums: patērētājam ir nevis četri, bet tikai trīs punkti. Tāpēc shēmā ir nevis seši, bet tikai trīs spriegumi: katrai patērētāja fāzei tieši pievadīts viens no līnijas spriegumiem. Tā kā visi spriegumi ir zināmi, uzdevumu iespējams risināt, izmantojot vektoru diagrammu metodi. Risinājuma plāns ir tāds kā vienmēr: **patērētāja topogrāfiskā diagramma; patērētāja fāžu spriegumi; fāžu strāvas; pārējās strāvas** (šeit tās ir trīs līnijas strāvas).

## 5.6. piemērs

Nesimetrisks trīsfāžu patērētājs (5.22.a att.) pieslēgts trīsfāžu līnijai, kuras līnijas spriegums  $U = 220 \text{ V}$ . Aprēķināt fāžu un līniju strāvas, kā arī katras fāzes patērēto aktīvo jaudu.

Dots: patērētāja AB fāzē ir rezistora un kondensatora virknes slēgums:  $R_1 = 4 \Omega$ ,  $X_C = 3 \Omega$ ; BC fāzē ir tikai induktīvā pretestība  $X_{L1} = 5 \Omega$ ; CA fāzē ir paralēlslēgums:  $R_2 = 3 \Omega$ ,  $X_{L2} = 3 \Omega$ .



5.22. att. Shēma 5.6. piemēram (a), topogrāfiskā diagramma un fāžu spriegumi (b).

### Atrisinājums

1. Patērētāja topogrāfiskajā diagrammā (5.22.b att. vai 5.5.a att.) visi punkti (A, B un C) sakrīt ar trīsfāžu **ģeneratora** topogrāfiskās diagrammas (5.2.c att.) attiecīgajiem punktiem. Diagrammā parādīti patērētāja fāžu spriegumi ( $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$ ,  $U_{CA}$ ). Katra fāze saņem attiecīgo līnijas spriegumu:

$$U_f = U_l = 220 \text{ V.}$$

2. Aprēķinām fāžu strāvu efektīvās vērtības un atrodam visas fāžu nobīdes. AB fāzes pilno pretestību un fāžu nobīdi atrodam no pretestību trīsstūra – tas līdzīgs 5.18. attēlā parādītajam. Tam atbilst vienādojumi (3.8a):

$$Z_{AB} \sqrt{R_1^2 + X_C^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \Omega; \quad \varphi_{AB} = \arcsin\left(\frac{-X_C}{Z_{AB}}\right) = \arcsin\left(\frac{-3}{5}\right) = -36,9^\circ.$$

Negatīvu fāžu nobīdes  $\varphi_{AB}$  vērtību nosaka kapacitīvā elementa  $X_C$  klātbūtne, un tas nozīmē, ka AB fāzē strāva **apsteidz** spriegumu par  $37^\circ$ .

AB fāzes strāvas efektīvā vērtība:

$$I_{AB} = \frac{U_f}{Z_{AB}} = \frac{220}{5} = 44 \text{ A.}$$

BC fāzes strāvas efektīvā vērtība:

$$I_{BC} = \frac{U_f}{X_{L1}} = \frac{220}{5} = 44 \text{ A.}$$

CA fāzē ir divi zari. Aprēķinām strāvas efektīvo vērtību katrā no tiem:

$$I_1 = \frac{U_f}{X_{L2}} = \frac{220}{3} = 73,3 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{U_f}{R_2} = \frac{220}{3} = 73,3 \text{ A.}$$

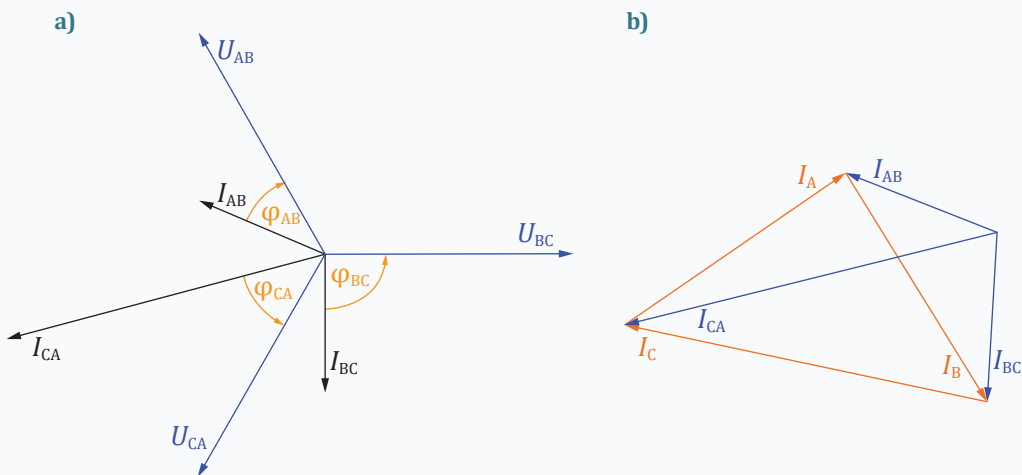
**Paralēlslēguma** gadījumā formulu strāvu vektoru saskaitīšanai vienmēr iegūst no **vektoru diagrammas**. Uzzīmējiet to patstāvīgi: sprieguma  $U_{CA}$  vektoru zīmē jebkurā virzienā; strāvas  $I_2$  vektors sakrīt ar izvēlēto vektora  $U_{CA}$  virzienu; strāva  $I_1$  zarā ar induktīvo pretestību atpaliek fāzē no sprieguma; saskaitot abus vektorus, iegūst taisnleņķa trīsstūri, no kura izriet formulas:

$$I_{CA} = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{73,3^2 + 73,3^2} = 102,8 \text{ A};$$

$$\varphi_{CA} = \arcsin\left(\frac{I_1}{I_{CA}}\right) = \arcsin\left(\frac{73,3}{102,8}\right) = 45^\circ.$$

Vektoru diagrammā būtu arī redzams, ka šī leņķa vērtība ir pozitīva – tas atbilst aktīvi induktīva rakstura pretestībai CA fāzē.

3. Lai atrastu līnijas strāvas, zīmē vektoru diagrammu. Vispirms pārvieto fāžu spriegumu vektorus no topogrāfiskās diagrammas (5.22.b att.) uz vektoru diagrammu (5.23.a att.) tā, lai tie sāktos vienā punktā (tad ērtāk būs izpildīt vektoru atņemšanas darbību). Zinot visas fāžu nobīdes, var atlikt fāžu strāvu vektorus attiecībā pret fāžu spriegumu vektoriem.



**5.23. att** Vektoru diagramma (pagaidām bez līnijas strāvām) (a), fāžu un līnijas strāvu vektori (b).

AB fāzē strāva **apsteidz** spriegumu par  $37^\circ$ . BC fāzē strāva [saskaņā ar (3.3)] **atpaliek** no sprieguma par  $90^\circ$ . CA fāzē pretestībām ir aktīvi induktīvs raksturs, tāpēc strāva no sprieguma par  $45^\circ$  **atpaliek**. Vienādojumus līnijas strāvu vektoru atrašanai uzraksta, izmantojot Kirhofa pirmā likuma (3.6) izteiksmes mezglam A, B un C (5.4):

$$\bar{I}_A = \bar{I}_{AB} - \bar{I}_{CA}; \quad \bar{I}_B = \bar{I}_{BC} - \bar{I}_{AB}; \quad \bar{I}_C = \bar{I}_{CA} - \bar{I}_{BC}.$$

5.23.b attēlā parādīti fāžu strāvu vektori, kas ņemti no 5.23.a attēla vektoru diagrammas. Ievērojiet, ka vektoru atņemšana ir vienkāršāka, ja visi fāžu

strāvu vektori sākas vienā punktā – tad atliek tikai savienot to galapunktus. Pārbaudiet patstāvīgi līniju strāvu vektoru **virzienus!**

Ja strāvu vektori zīmēti, ievērojot izvēlēto mērogu, un sevišķa aprēķina precizitāte nav nepieciešama, tad līnijas strāvu vērtības atrod, izmērot to vektoru garumu. Rūpīgāk izpildot augstāk minētās darbības, no 5.23.b attēla diagrammas iegūtu aptuvenus rezultātus:

$$I_A \approx 74 \text{ A}; \quad I_B \approx 74 \text{ A}; \quad I_C \approx 103 \text{ A}.$$

Jāpiebilst, ka arī vektoru diagrammu metodes ietvaros iespējams paaugstināt rezultātu precizitāti, izveidojot formulas līnijas strāvu aprēķināšanai, jo fāžu strāvu vērtības un virzieni 5.23.b attēlā ir pilnīgi noteikti.

4. Aktīvo jaudu patērē rezistors  $R_1$  un  $R_2$ . Aktīvās jaudas aprēķina šādi:

$$P_{AB} = U_{AB} I_{AB} \cos \varphi_{AB} = R_1 I_{AB}^2 = 220 \cdot 44 \cdot 0,8 = 4 \cdot 44^2 = 7744 \text{ W},$$

$$P_{CA} = U_{CA} I_{CA} \cos \varphi_{CA} = R_2 I_2^2 = 220 \cdot 102,8 \cdot 0,707 = 3 \cdot 73,3^2 = 16\,126 \text{ W},$$

$$P = P_{AB} + P_{CA} = 7744 + 16\,126 = 23\,870 \text{ W}.$$

## 5.7. piemērs

Aprēķināsim 5.6. piemēra shēmu (5.22.a att.) ar simbolisko metodi.

### Atrisinājums

1. Pierakstām dotos spriegumus kompleksā formā. Lai to izdarītu pareizi, **jāzina sprieguma vektoru virzieni**. 5.23.a attēlā redzams, ka spriegumu  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$  un  $U_{CA}$  vektoru sākumfāze ir attiecīgi  $120^\circ$ ,  $0^\circ$  un  $-120^\circ$ . Visu šo spriegumu vērtība ir 220 V, tāpēc:

$$\underline{U}_{AB} = 220(\cos 120^\circ + j \sin 120^\circ) = (-110 + j190,5) \text{ V}; \quad \underline{U}_{BC} = 220 \text{ V};$$

$$\underline{U}_{CA} = 220[\cos(-120^\circ) + j \sin(-120^\circ)] = (-110 - j190,5) \text{ V}.$$

2. Šie spriegumi pielikti četriem zariem, kuru kompleksās pretestības ir:

$$\underline{Z}_{AB} = (4 - j3) \Omega; \quad \underline{Z}_{BC} = j5 \Omega; \quad \underline{Z}_1 = j3 \Omega; \quad \underline{Z}_2 = 3 \Omega.$$

3. Vispirms aprēķinām kompleksās strāvas nesazarotajās fāzēs:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{-110 + j190,5}{4 - j3} = (-40,5 + j17,3) \text{ A};$$

$$\underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{220}{j5} = -j44 \text{ A}.$$

Aprēķinām šo komplekso lielumu moduļus – tie ir attiecīgo fāzes strāvu efektīvās vērtības:

$$I_{AB} = \sqrt{\operatorname{Re}^2(I_{AB}) + \operatorname{Im}^2(I_{AB})} = \sqrt{40,5^2 + 17,3^2} = 44 \text{ A}; \quad I_{BC} = 44 \text{ A}.$$

Atrodam abu CA fāzes zaru kompleksās strāvas:

$$\underline{I}_1 = \frac{U_{CA}}{Z_1} = \frac{-110 - j190,5}{-j3} = (-63,5 + j36,7) \text{ A};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{U_{CA}}{Z_2} = \frac{-110 - j190,5}{3} = (-36,7 - j63,5) \text{ A}.$$

CA fāzes strāvas komplekso vērtību atrodam pēc strāvu vienādojuma (4.6) mezglam C:

$$\underline{I}_{CA} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = -63,5 + j36,7 - 36,7 - j63,5 = (-100,2 - j26,8) \text{ A}.$$

CA fāzes strāvas efektīvā vērtība:

$$I_{CA} = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\underline{I}_{CA}) + \operatorname{Im}^2(\underline{I}_{CA})} = \sqrt{100,2^2 + 26,8^2} = 103,7 \text{ A}.$$

4. Līnijas strāvas kompleksā formā:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = -40,5 + j17,3 - (-100,2 - j26,8) = (59,7 - j44,1) \text{ A};$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB} = -j44 - (-40,5 + j17,3) = (40,5 - j61,3) \text{ A};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC} = -100,2 - j26,8 - (-j44) = (-100,2 + j17,2) \text{ A}.$$

Atrodam līnijas strāvu efektīvās vērtības:

$$I_A = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\underline{I}_A) + \operatorname{Im}^2(\underline{I}_A)} = \sqrt{59,7^2 + 44,1^2} = 74,2 \text{ A};$$

$$I_B = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\underline{I}_B) + \operatorname{Im}^2(\underline{I}_B)} = \sqrt{40,5^2 + 61,3^2} = 73,4 \text{ A};$$

$$I_C = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\underline{I}_C) + \operatorname{Im}^2(\underline{I}_C)} = \sqrt{100,2^2 + 17,2^2} = 101,6 \text{ A}.$$

Šie rezultāti ir precīzāki, salīdzinot ar tiem, ko iegūst ar vektoru diagrammu metodi (5.6. piemērs), bet pats aprēķins sarežģītāks. Kuram no abiem risinājumiem jūs dotu priekšroku?





## ievietojiet vispiemērotākos vārdus

1. Trīsfāžu avota B fāzes EDS ..... fāzes EDS par ..... grādiem.
2. Spriegumu starp trīsfāžu ģenerators spailēm A un B sauc par ..... ..
3. Līnijas spriegums ir ..... reizes ..... par ģenerators fāzes spriegumu.
4. Zvaigznē slēgta patērētāja fāzēs plūst ..... ..
5. Trīsstūrī slēgta patērētāja ..... .. ir vienādi ar ..... spriegumiem.
6. .... .. ir spriegums starp patērētāja neitrāli un ģenerators neitrāli.
7. .... izlīdzina zvaigznē slēgta nesimetriska patērētāja ..... ..
8. .... patērētāja gadījumā ..... strāva  $I_N = 0$  A.
9. Strāva neitrālvadā vienāda ar ..... strāvu ..... summu.
10. Neitrālvads nodrošina ..... patērētāja ..... spriegumus.
11. Divu vatmetru metodi lieto trīsfāžu jaudas mērīšanai ..... sistēmā.

## Salīdziniet atbildes

[9] fāžu, vektoru; [10] vienāds, fāžu; [11] trīsvadu.  
[1] apsteidz, C, 120; [2] līnijas spriegumu; [3] 1,73, lielāks; [4] līnijas strāvas; [5] fāžu spriegumi, līnijas; [6] neitrāles nobīdes spriegums; [7] neitrālvads, fāžu spriegums; [8] simetriska, neitrālvada;

## 6. NODAĻA

### Pārejas procesi līdzstrāvas ķēdēs

Iepriekšējās nodaļās aplūkojam **stacionārus** režīmus līdzstrāvas ķēdēs, kad strāvas un spriegumi ilgstoši saglabā nemainīgas vērtības. Stacionārs režīms novērojams arī maiņstrāvas ķēdē, ja tajā neveic izmaiņas. Lai gan strāvas un spriegumi laikā mainās sinusoidāli, mēraparāti uzrāda nemainīgu minēto lielumu vidējo kvadrātisko vērtību vai nemainīgu jaudas vidējo vērtību.

**Pārejas procesi** rodas, elektriskajai ķēdei pārejot **no viena stacionāra režīma otrā**. Pārejas procesā strāvas un spriegumi nav nedz konstanti lielumi, nedz arī periodiskas laika funkcijas. Pārejas procesa novērošanai parastie mēraparāti nav piemēroti, tāpēc šim nolūkam izveido iekārtu pārejas procesa periodiskai atkārtošanai un strāvas vai sprieguma laika diagrammu novēro osciloskopa ekrānā.

Ja ķēdē ir tikai rezistīvi elementi ( $R$ ), tad visas strāvas (spriegumi) jaunās stacionārās vērtības sasniedz uzreiz – pakāpeniska **pārejas procesa** nav. Turpretī, ja ķēdē ir vismaz viens **enerģijas uzkrājējs** – induktīva spole vai kondensators –, tad pāreja uz jaunu stacionāro režīmu prasa zināmu laiku (piemēram, dažas sekundes desmitdaļas). Pārejas procesi rodas tādēļ, ka spoles radītā magnētiskā lauka enerģijas vai kondensatorā uzkrātās elektriskās enerģijas izmaiņa nevar notikt momentāni.

Visbiežāk pāreja uz jaunu režīmu notiek, izmainot shēmu. Piemēram, ķēdi pieslēdz sprieguma avotam vai atslēdz no tā. Pārejas process var arī notikt, pieslēdzot vai atslēdzot atsevišķus ķēdes elementus, kā rezultātā arī izmainās shēmas parametri. Darbību ar slēdzi (noslēgšanu vai atslēgšanu) vienā vārdā sauc par **komutāciju**.

Šajā nodaļā iztirzāta pārejas procesu analīzes un aprēķina metodika. Ja līdzstrāvas ķēdes vienādojumi atvasinājumus nesatur un aprēķinos sastopamies tikai ar algebriskajiem vienādojumiem, tad pārejas procesus apraksta diferenciālvienādojumi – sakarā ar atvasinājumiem induktīvu un kapacitīvu elementu vienādojumā (1.3) un (1.4).

Šeit galvenokārt aplūkotī pārejas procesi līdzstrāvas ķēdēs ar vienu enerģijas uzkrājēju (spoli vai kondensatoru). Izvēlēta šāda pieeja. Vispirms iepazīsimies ar pārejas procesa pamatjēdzieniem un tipisku laika diagrammu. Tad izanalizēsim pirmās kārtas diferenciālvienādojuma īpašības un atrisinājuma formu. Iegūtie rezultāti ļaus turpmāk analizēt un aprēķināt  $RL$  un  $RC$  ķēdes bez diferenciālvienādojumu palīdzības. Nodaļas beigās īsi aplūkosim otrās kārtas diferenciālvienādojumu  $RLC$  ķēdei un tā atrisinājuma īpatnības.

Šajā nodaļā jūs iepazīsities ar

- pārejas procesa pamatjēdzieniem un laika diagrammu,
- diviem komutācijas likumiem,
- nehomogēnu pirmās kārtas diferenciālvienādojumu un tā atrisinājumu,
- pārejas procesu aprēķināšanu  $RL$  un  $RC$  ķēdēs bez diferenciālvienādojumu lietošanas,
- pārejas procesu raksturu un laika diagrammām  $RL$  un  $RC$  ķēdēs ar līdzsprieguma avotu,
- pārejas procesu raksturu  $RLC$  ķēdē.

## Pamatjēdzieni un pieņemtie apzīmējumi

Atšķirībā no stacionāriem režīmiem līdzstrāvas ķēdē (2. nodaļā), kur laika diagrammas nelieto, un maiņstrāvas ķēdē (pārējās nodaļās), kur sinusoidālu spriegumu un strāvu laika diagrammas aizstāj kopēja topogrāfiskā un vektoru diagramma, ikviena pārejas procesa analīze nav iedomājama bez **laika diagrammas**. Sprieguma vai strāvas laika diagrammā parāda abas šī lieluma stacionārās vērtības, lēcienveida izmaiņas (ja tādas ir) pārejas procesa sākumā un pakāpeniskās izmaiņas pārejas procesa laikā.

### Divas shēmas atkarībā no slēdža stāvokļa:

- shēma pirms komutācijas,
- shēma pēc komutācijas.

### Trīs režīmi:

- stacionārais režīms pirms komutācijas,
- pārejas process pēc komutācijas,
- uzspiestais režīms pēc pārejas procesa.

### Trīs raksturīgās vērtības un to apzīmējumi:

- vērtība pirms komutācijas:

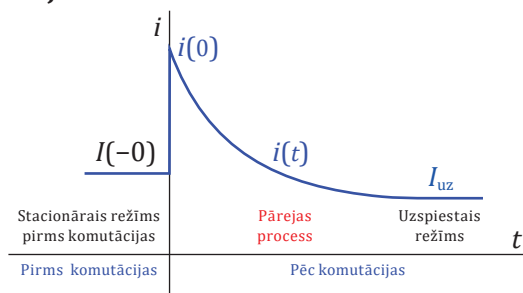
$I(-0)$  – īsi pirms komutācijas,

- sākumvērtība:

$i(0)$  – uzreiz pēc komutācijas,

- uzspiestā vērtība:

$I_{uz}$  – pēc pārejas procesa.



6.1. att. Pārejas procesa laika diagrammas piemērs.

6.1. attēlā parādīta kādas strāvas laika diagramma  $i(t)$  pārejas procesā, kas norisinās līdzstrāvas ķēdē ar vienu enerģijas uzkrājēju ( $RL$  vai  $RC$  ķēdē). Pārejas process sākas **komutācijas brīdī** – laika momentā  $t = 0$  –, kad izmainās ķēdes parametri: **shēmu pirms komutācijas** nomaina **shēma pēc komutācijas**. Pirms komutācijas ķēdē eksistēja **stacionārs režīms**. Pēc komutācijas ķēdē notiek **pārejas process**; tas beidzas ar jaunu stacionāru režīmu, ko pieņemts saukt par **uzspiesto režīmu**.

Abas stacionārās vērtības apzīmē ar lielajiem burtiem – kā tas jau pieņemts līdzstrāvas ķēdēs. Lai norādītu uz strāvas vai sprieguma vērtības piederību konkrētam režīmam, lieto īpašus apzīmējumus. Piemēram, sprieguma  $u_1(t)$  vērtības apzīmējums pirms komutācijas, pārejas procesa sākumā un beigās būs attiecīgi:  $U_1(-0)$ ,  $u_1(0)$  un  $U_{1uz}$ .

Lai atrastu abas aprēķināmās strāvas (sprieguma) stacionārās vērtības (pirms komutācijas un uzspiesto), katru no divām shēmām (pirms un pēc komutācijas) aprēķina kā **līdzstrāvas ķēdi**. Stacionāra režīma aprēķinu, tajā skaitā atbrīvošanos no elementiem  $L$  un  $C$ , aplūkojām 2. nodaļā.

Šajā nodaļā iemācīsimies aprēķināt strāvu un spriegumu momentānās vērtības pārejas procesa laikā, noteikt iespējamās lēcienveida izmaiņas komutācijas brīdī un uzzīmēt pārejas procesa laika diagrammu.

## Pārejas procesi $RL$ un $RC$ ķēdēs

### Pirmās kārtas diferenciālvienādojums un tā atrisinājums

Induktīva elementa  $L$  vai kapacitīva elementa  $C$  vienādojums (1.3) vai (1.4) satur atvasinājumu. Tādēļ pārejas procesu līdzstrāvas ķēdē ar vienu šādu elementu apraksta pirmās kārtas diferenciālvienādojums. Iepazīsimies ar šī vienādojumu tipa īpašībām, lai turpmāk pārejas procesu jebkuras konfigurācijas  $RL$  un  $RC$  ķēdē aprēķinātu bez diferenciālvienādojumu palīdzības.

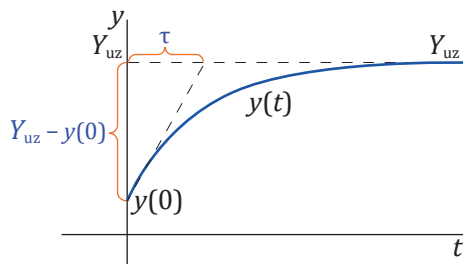
### Diferenciālvienādojums

Kāda sprieguma vai strāvas – vispārinot apzīmēsim to ar  $y$  – izmaiņu  $y(t)$   $RL$  vai  $RC$  ķēdē apraksta pirmās kārtas diferenciālvienādojums. Vispārīgā gadījumā vienādojums ir nehomogēns (labā puse nav vienāda ar nulli):

$$\frac{dy}{dt} + ay = b. \quad (6.1)$$

### Laika konstante

Aplūkosim šī vienādojuma atrisinājuma  $y(t)$  grafika piemēru (6.2. att.). Process sākas ar sākumvērtību  $y(0)$  un beidzas, tuvojoties uzspiestajai vērtībai  $Y_{uz}$ . Grafiks atbilst eksponentfunkcijai ar negatīvu kāpinātāju, kas var būt augoša (kā 6.2. att.) vai dilstoša – ja uzspiestā vērtība izrādās mazāka nekā sākumvērtība.



6.2. att. Pārejas procesa laika konstante.

6.2. att. laika diagramma ilustrē vienu no pārejas procesa parametriem – **laika konstanti**  $\tau$ . Laika konstantes vērtību grafiski nosaka, kā parādīts attēlā: velkot pieskari funkcijas grafikam punktā  $y(0)$ .

Laika konstante  $\tau$  rāda, cik ilgā laikā funkcija  $y(t)$  sasniegtu beigu vērtību  $Y_{uz}$ , maiņoties ar sākotnējo izmaiņas ātrumu (kā momentā  $t = 0$ ). Diagrammā redzama funkcijas izmaiņas ātruma (t. i., funkcijas atvasinājuma) vērtība:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Y_{uz} - y(0)}{\tau}.$$

Izrādās, ka **laika konstante**  $\tau$  atrodama arī vienādojumā (6.1) – tā ir apgrieztais lielums koeficientam  $a$  ( $\tau = 1/a$ ):

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = b. \quad (6.1a)$$

Šo formu (6.1a) izmantosim, lai konkrētas shēmas diferenciālvienādojumā uzreiz pamanītu laika konstantes izteiksmi. Lai pierādītu, ka forma (6.1a) izriet no kanoniskās (6.1), pēdējo var izpētīt divos režīmos: pārejas procesa sākumā un beigās. Izmanto to, ka abos gadījumos ir pieejamas (6.2. att.) funkcijas  $y$  un tās atvasinājuma  $dy/dt$  vērtības: pirmkārt, pēc pārejas procesa ( $t = \infty$ ) līkne ir sasniegusi uzspiesto vērtību ( $y = Y_{uz}$ ) un izmaiņas nenotiek ( $dy/dt = 0$ ); otrkārt, pārejas procesa sākumā ( $t = 0$ ) funkcijas vērtība  $y = y(0)$  un izmaiņas ātrums  $dy/dt = [Y_{uz} - y(0)]/\tau$ .

### Diferenciālvienādojuma atrisinājums

No matemātikas kursa zināms, ka pirmās kārtas nehomogēna diferenciālvienādojuma ar konstantiem koeficientiem **atrisinājumu meklē formā**:

$$y(t) = Ae^{pt} + Y_{uz}. \quad (6.2)$$

Pirmais saskaitāmais ir **homogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums**. Tas satur pagaidām nezināmu **integrācijas konstanti**  $A$  un eksponenti, kuras kāpinātājā **koeficients**  $p$  ir diferenciālvienādojuma **raksturīgā vienādojuma sakne**. Otrs saskaitāmais ir attiecīgā nehomogēnā vienādojuma **partikulārais atrisinājums**.

Raksturīgo vienādojumu iegūst no diferenciālvienādojuma (6.1a), pirmo atvasinājumu tajā aizstājot ar  $p$ , bet mainīgo  $y$  aizstājot ar "1". Lūk, šī diferenciālvienādojuma raksturīgais vienādojums un tā sakne  $p$ :

$$p + \frac{1}{\tau} = 0, \quad p = -\frac{1}{\tau}. \quad (6.3)$$

Tagad diferenciālvienādojuma atrisinājuma izteiksmi (6.2) var pārveidot, iesaistot tajā laika konstanti  $\tau$ :

$$y(t) = Ae^{-t/\tau} + Y_{uz}. \quad (6.2.a)$$

Pārejas procesu terminoloģijā atrisinājuma (6.2a) pirmo saskaitāmo sauc par **brīvo komponenti**, bet otro – par **uzspiesto komponenti** (tā ir tā pati uzspiestā vērtība). Ievērosim, ka brīvā komponente – atrisinājuma mainīgā daļa – ir dilstoša eksponent-funkcija, jo tās kāpinātājs ir negatīvs.

### Rezultāti lietošanai aprēķinos

Atrisinājuma brīvā komponente  $Ae^{-t/\tau}$  laika momentos  $t = \tau; 2\tau; 3\tau; 4\tau$  ir attiecīgi 0,368; 0,135; 0,050; 0,018 no tās sākumvērtības  $A$ . Citiem vārdiem, līdz norādītajiem laika momentiem notiek attiecīgi 63,2 %, 87,5 %, 95 %, 98,2 % izmaiņu. Tāpēc ar precizitāti līdz 2 % var uzskatīt, ka **pārejas procesa ilgums ir  $4\tau$** .

Integrācijas konstantes  $A$  noteikšanai izteiksmi (6.2a) piemēro laika momentam  $t = 0$ :

$$y(0) = Ae^0 + Y_{uz} = A + Y_{uz}, \quad (6.4)$$

no kurienes izriet

$$A = y(0) - Y_{uz}.$$

Tātad, lai iegūtu atrisinājumu, nesastādot diferenciālvienādojumu, jāzina meklējamās strāvas vai sprieguma **sākumvērtība** un **uzspiestā vērtība**. Tad konkrētā pārejas procesa izteiksme iegūst, ievietojot abas vērtības integrācijas konstantes formulā (6.4) un diferenciālvienādojuma atrisinājuma izteiksmē (6.2a). Apvienojot abas formulas, iegūstam lietošanai ērtāku meklējamā sprieguma vai strāvas izteiksme:

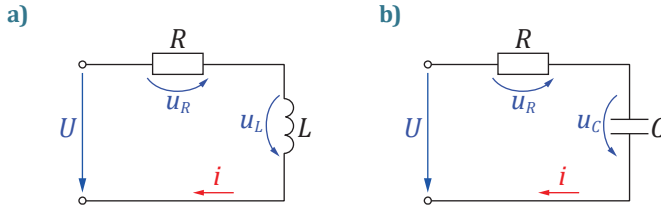
$$y(t) = Ae^{-t/\tau} + Y_{uz} = [y(0) - Y_{uz}]e^{-t/\tau} + Y_{uz}. \quad (6.5)$$

### Kā meklēt sākumvērtību

Problēmas ar sākumvērtības noteikšanu varētu radīt tas, ka shēmā pēc komutācijas trūkst viena vienādojuma, jo induktīva ( $L$ ) vai kapacitīva ( $C$ ) elementa vienādojums satur atvasinājumu  $du/dt$  vai  $di/dt$ , bet sprieguma vai strāvas izmaiņas ātrums nav zināms. Centrālā ideja, kas jāapzinās, aprēķinot jebkuru pārejas procesu, ir šāda. Aprēķins ir iespējams tikai tad, ja shēmā pārejas procesa sākumā ( $t = 0$ ) bez avota sprieguma un shēmas parametriem ir zināms vēl viens lielums – tās vienīgās strāvas vai tā vienīgā sprieguma vērtība, uz kuru attiecas viens no diviem **komutācijas likumiem**.

## Vēl par laika konstanti

Sastādīsim diferenciālvienādojumu vienkāršai  $RL$  vai  $RC$  ķēdei. Salīdzinot to ar (6.1a), atradīsim laika konstantes  $\tau$  izteiksmes.



6.3. att. Vienkāršākās shēmas ar vienu enerģijas uzkrājēju:  $RL$  ķēde (a),  $RC$  ķēde (b).

6.3.a attēla shēmai, izmantojot (1.5), (1.2), (1.3):

$$U = u_R + u_L = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

Diferenciālvienādojums:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{U}{L}.$$

Koeficients pie  $i$ :  $a = R/L$ , tātad

$$\tau = \frac{1}{a} = \frac{L}{R}.$$

Šie rezultāti paliek spēkā arī sarežģītākām ķēdēm.

Jebkurai  $RL$  ķēdei pārejas procesa laika konstante  $\tau$  arī ir tieši proporcionāla induktivitātei  $L$ , bet apgriezti proporcionāla shēmas ekvivalentajai pretestībai  $R$ , kuras vērtība ir atkarīga no konkrētās shēmas:

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (6.6)$$

Jebkurai  $RC$  ķēdei laika konstante  $\tau$  ir tieši proporcionāla kapacitātei  $C$  un ekvivalentajai pretestībai  $R$ , kas arī ir atkarīga no konkrētās shēmas:

$$\tau = RC. \quad (6.7)$$

Metode ekvivalentās pretestības noteikšanai aplūkota turpmāk, pēc pārejas procesa aprēķina plāna.

Lūk, arī visi rezultāti, kas atļauj turpmāk iztikt bez diferenciālvienādojumiem. Pie diferenciālvienādojumiem atgriezīsimies tikai nodaļas beigās, kad aplūkosim pārejas procesus ķēdē ar diviem enerģijas uzkrājējiem.

## Komutācijas likumi – pats svarīgākais pārejas procesos

Pārejas procesi rodas tāpēc, ka spolē plūstošās strāvas radītā magnētiskā lauka enerģijas vai kondensatorā uzkrātās elektriskās enerģijas izmaiņa nevar notikt momentāni. Kā zināms, spoles magnētiskā lauka enerģija ir proporcionāla spolē plūstošās strāvas momentānās vērtības kvadrātam un kondensatorā uzkrātā elektriskā lauka enerģija ir proporcionāla kondensatora sprieguma momentānās vērtības kvadrātam:

$$W_m = \frac{Li^2}{2}, \quad W_{el} = \frac{Cu^2}{2},$$

tādēļ formulās minētie divi lielumi – induktīva elementa strāva un spriegums uz kapacitīva elementa – nekad nevar mainīties lēcienveidīgi. Piemērojot to komutācijas momentam  $t = 0$ , var formulēt **divus komutācijas likumus**.

1. **Strāva induktīvā elementā  $L$  (vai spolē) komutācijas brīdī nemainās ar lēcieni.** Induktivitātes spoles strāvas izmaiņa pārejas procesā sākas ar to pašu vērtību, kāda bija pirms komutācijas:

$$i_L(0) = I_L(-0). \quad (6.8a)$$

2. **Spriegums uz kapacitīva elementa (vai kondensatora) komutācijas brīdī nemainās ar lēcieni.** Kondensatora sprieguma izmaiņa pārejas procesā sākas ar to pašu vērtību, kāda bija pirms komutācijas:

$$u_C(0) = U_C(-0). \quad (6.8b)$$

Visi pārējie spriegumi un strāvas (tajā skaitā visu rezistīvo elementu spriegumi un strāvas, spriegumi uz visiem induktīvajiem elementiem un visu kapacitīvo elementu strāvas) nav saistītas ar uzkrāto enerģiju un nekas tiem neliedz mainīties lēcienveidīgi. Piemēram, pirmajā brīdī pēc komutācijas ķēdē var rasties pārspriegumi – tādas spriegumu vērtības, kas ievērojami pārsniedz avota spriegumu.

Komutācijas likumiem ir svarīga loma pārejas procesa aprēķinos: tie dod vienīgu iespēju noteikt nepieciešamo viena lieluma **sākumvērtību** pārejas procesa shēmā. Nevar aprēķināt pārejas procesus, nezinot komutācijas likumus, lai gan studentu mēģinājumu skaits šajā virzienā ievērojami pārsniedz mūžīgā dzinēja izgudrotāju skaitu.

## Pārejas procesa aprēķina plāns

Aplūkojam pārejas procesu līdzstrāvas ķēdē ar vienu enerģijas uzkrājēju ( $L$  vai  $C$ ). Tā vietā, lai sastādītu un risinātu diferenciālvienādojumu, izmantosim iepriekš izdarīto pārejas procesa diferenciālvienādojuma analīzi un iegūto atrisinājuma formu (6.2a) un (6.4).

Dots avota spriegums  $U$  un shēmas parametri ( $R, L$  vai  $C$ ). Shēmā ir slēdzis un norāde uz komutācijas veidu: vai slēdzi pārejas procesa sākumā noslēdz vai atslēdz. Jāaprēķina kāda viena sprieguma vai strāvas laika diagramma  $y(t)$  pārejas procesā. Izmanto-



jamās “tabulas formulas” apkopotas 6.1. tabulā. Vispārīgi apzīmējumi  $y(t), y(0), Y(-0), Y_{uz}$  šeit izvēlēti, lai tos varētu nomainīt ar konkrētā uzdevumā aprēķināmas strāvas vai sprieguma apzīmējumiem, piemēram,  $i_3(t), i_3(0), I_3(-0), I_{3uz}$ .

6.1. tabula

**Formulas pārejas procesa aprēķinam**

Vienādojumi	Pārejas procesā	Stacionārā režīmā	
<b>Elementu vienādojumi</b>	$u = Ri$	$U = RI$	(1.2), (2.2)
	$u = L \frac{di}{dt}$	$U = 0$	(1.3), (2.3)
	$i = C \frac{du}{dt}$	$I = 0$	(1.4), (2.4)
<b>Spriegumu un strāvu vienādojumi</b>	$u_{13} = u_{12} + u_{23}$	$U_{13} = U_{12} + U_{23}$	(1.5), (2.5)
	$\sum \pm i = 0$	$\sum \pm I = 0$	(1.6), (2.6)

**Pārejas procesa aprēķina plāns RC vai RL ķēdei ar līdzsprieguma avotu**

- Uzzīmē aizvietošanas shēmu stacionārajam režīmam pirms komutācijas: saskaņā ar (2.3) induktīvu elementu aizstāj ar savienotājvadu un saskaņā ar (2.4) kapacitīvu elementu aizstāj ar pārtraukumu. Piemērojot shēmai “tabulas formulas” – (2.2), (2.5) un (2.6) –, aprēķina meklējamā sprieguma vai strāvas vērtību pirms komutācijas  $Y(-0)$ . Sameklē shēmā **lielumu, uz kuru attiecas komutācijas likums (KL)** – strāvu spolē vai spriegumu uz kondensatora. Aprēķina arī šī lieluma vērtību pirms komutācijas  $Y_{KL}(-0)$ .
- Uzzīmē pilnu shēmu režīmam pēc komutācijas, lai atrastu meklējamā sprieguma vai strāvas sākumvērtību  $y(0)$ . Šķiet, ka aprēķinam trūkst datu – elementa vienādojums (1.3) vai (1.4) nav izmantojams, jo atvasinājuma vērtība nav zināma. Situāciju glābj tas, ka shēmā vienas strāvas vai sprieguma vērtība ir zināma: **saskaņā ar komutācijas likumu**  $y_{KL}(0) = Y_{KL}(-0)$ . Lūk, tāpēc shēmā pirms komutācijas bija jāaprēķina arī šī vērtība. Izmantojot vienādojumus (1.2), (1.5) un (1.6), var aprēķināt meklējamā sprieguma vai strāvas sākumvērtību  $y(0)$ .
- Uzzīmē aizvietošanas shēmu uzspiestajam režīmam – pēc pārejas procesa. Shēmā pēc komutācijas induktīvu elementu  $L$  aizstāj ar vadu un kapacitīvu elementu  $C$  aizstāj ar pārtraukumu. Izmantojot vienādojumus (2.2), (2.5) un (2.6), jāaprēķina tikai meklējamā sprieguma vai strāvas uzspiestā vērtība  $Y_{uz}$ .
- Meklējamā lieluma sākumvērtība un uzspiestā vērtība tagad ir zināma. Tas atļauj atrast integrācijas konstanti  $A$  (6.4), ko ievieto diferenciālvienādojuma atrisinājumā (6.2a). Var lietot arī abu formulu apvienojumu (6.5):

$$y(t) = Ae^{-t/\tau} + Y_{uz} = [y(0) - Y_{uz}]e^{-t/\tau} + Y_{uz}.$$

- Lai uzzīmētu funkcijas  $y(t)$  **laika diagrammu**, pieņem, ka  $t = 0; \tau; 2\tau; 3\tau; 4\tau$ , aprēķina attiecīgās  $y$  vērtības un attēlo grafikā. Tajā parāda arī vērtību pirms komutācijas  $Y(-0)$  un iespējamo lēcieni pārejas procesa sākumā.

## Laika konstantes noteikšana

Kā aprēķināt laika konstanti, nesastādot pārejas procesa diferenciālvienādojumu?

Redzējām, ka shēmai, kurā ir  $R$  un  $L$  virknes slēgums, laika konstante  $\tau$  proporcionāla induktivitātei  $L$ , bet apgriezti proporcionāla pretestībai  $R$  [vienādojums (6.6)]:  $\tau = L/R$ . Shēmai, kurā ir  $R$  un  $C$  virknes slēgums, laika konstante ir tieši proporcionāla pretestībai un kapacitātei [vienādojums (6.7)]:  $\tau = RC$ .

Arī sarežģītākām shēmām lieto šīs formulas, vienīgi konkrētai shēmai jāaprēķina **ekvivalentā pretestība**  $R$ . To nosaka šādi:

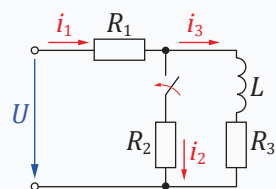
- zīmē **shēmu pēc komutācijas**, jo pārejas process notiek tajā;
- shēmā pēc komutācijas avotu  $U$  aizstāj ar savienotājvadu;
- aprēķina pārejas procesa ekvivalento pretestību  $R$ , apejot shēmu no kondensatora  $C$  vai induktīva elementa  $L$  viena izvada līdz otram. Aprēķināto vērtību ievieto laika konstantes  $\tau$  izteiksmē (6.6) vai (6.7).

## Pārejas procesu aprēķina piemēri

### 6.1. piemērs

6.4. attēla shēmā ir 120 V līdzsprieguma avots. Shēmā pēc rezistora  $R_2$  pieslēgšanas notiek pārejas process. Noteikt strāvas  $i_1(t)$  vērtības pārejas procesa laikā un uzzīmēt tās laika diagrammu.

Dots: rezistoru pretestības:  $R_1 = R_3 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ; ideālas spoles induktivitāte  $L = 0,4 \text{ H}$ .



6.4. att. 6.1. piemēra shēma.

### Atrisinājums

#### 1. Vērtības pirms komutācijas

Uzzīmējam shēmu pirms komutācijas (6.5.a att.). Elementu  $L$  saskaņā ar tā vienādojumu līdzstrāvas ķēdei (2.3) aizstāj ar vadu. Tekstā un formulās strāvu apzīmējumos pievieno norādi uz režīmu pirms komutācijas:  $(-0)$ .

Komutācijas likumam (6.8a) pakļaujas strāva spolē  $I_3$ , tāpēc jāatrod arī tās vērtība:

$$I_1(-0) = I_3(-0) = \frac{U}{R_1 + R_3} = \frac{120}{20 + 20} = 3 \text{ A.}$$

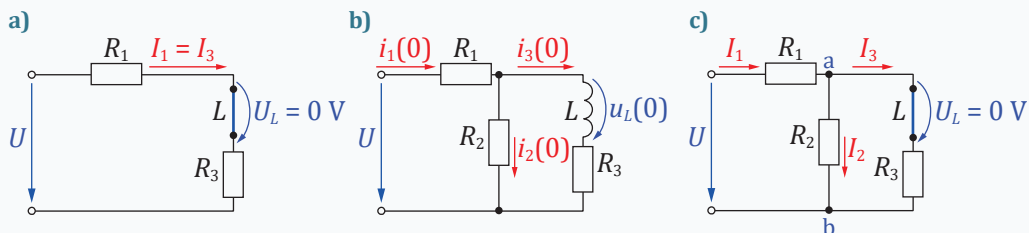
#### 2. Sākmvērtības aprēķins

6.5.b attēlā parādīta pārejas procesa shēma. To izmantojam sākmvērtības (kad  $t = 0$ ) aprēķinam. Kurš no lielumiem tajā zināms saskaņā ar komutācijas likumu? Atbilde: saskaņā ar formulu (6.8a) zināma strāvas  $i_3$  vērtība:

$$i_3(0) = I_3(-0) = 3 \text{ A.}$$

**Uzmanību!** Kļūda būtu apgalvot, ka arī meklējamās strāvas  $i_1$  sākmvērtība  $i_1(0)$  ir tāda pat kā pirms komutācijas, kad  $I_1(-0) = 3 \text{ A}$ . Tas tā nav divu iemeslu

dēļ: pirmkārt, uz strāvu rezistīvā elementā komutācijas likumu attiecināt nevar; otrkārt, rezistors  $R_1$  pārejas procesa shēmā (6.5.b att.) vairs nav slēgts virknē ar spoli. Tāpēc strāvas  $i_1$  sākumvērtība  $i_1(0)$  vēl jāaprēķina.



6.5. att. Trīs režīmu shēmas: pirms komutācijas (a), pārejas procesa sākuma momentā (b), uzspiestajā režīmā (c).

Lai samazinātu nezināmo skaitu, izsakām strāvu  $i_2$ , izmantojot (1.6):

$$i_2(0) = i_1(0) - i_3(0).$$

Sastādām spriegumu vienādojumu, izmantojot (1.5) kopā ar (1.2):

$$U = R_1 i_1(0) + R_2 [i_1(0) - i_3(0)].$$

Tā kā strāva  $i_3(0)$  zināma, vienādojumā paliek tikai viens nezināmais. Aprēķinām to:

$$i_1(0) = \frac{U + R_2 i_3(0)}{R_1 + R_2} = \frac{120 + 10 \cdot 3}{20 + 10} = 5 \text{ A.}$$

### 3. Uzspiestā vērtība

Uzzīmējam shēmu pēc komutācijas (6.5.c att.). Tā ir iepriekšējā shēma (6.5.b att.), kurā induktīvais elements  $L$  aizstāts ar vadu. Strāvu un spriegumu apzīmējumiem formulās pievieno uzspiestā režīma indeksu "uz". Līdzīgas shēmas aprēķinu aplūkojām 2. nodaļā. Shēmas ekvivalentā pretestība:

$$R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 20 + \frac{10 \cdot 20}{10 + 20} = 26,67 \text{ } \Omega.$$

Atrodam strāvas  $i_1$  uzspiesto vērtību:

$$I_{1uz} = \frac{U}{R} = \frac{120}{26,67} = 4,5 \text{ A.}$$

### 4. Pārejas procesa izteiksme

Pārejas procesa izteiksmi atrod pēc (6.2a) un (6.4), zinot strāvas  $i_1$  sākumvērtību un uzspiesto vērtību:

$$A = i_1(0) - I_{1uz} = 5 - 4,5 = 0,5,$$

$$i_1(t) = A e^{-t/\tau} + I_{1uz} = 0,5 e^{-t/\tau} + 4,5.$$

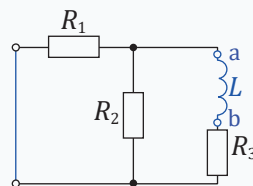
### 5. Laika konstante $\tau$

Shēmās ar induktīvu elementu laika konstanti nosaka formula (6.6):  $\tau = \frac{L}{R}$ .

Shēmā pēc komutācijas avotu aizstāj ar vadu (6.6. att.) un nosaka **ekvivalento pretestību**  $R$  attiecībā pret induktīvā elementa izvadiem a un b. Ceļā no a līdz b vispirms ir pretestību  $R_1$  un  $R_2$  paralēlslēgums, pēc tam pretestība  $R_3$ :

$$R = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 20 + \frac{20 \cdot 10}{20 + 10} = 26,67 \Omega.$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{400 \cdot 10^{-3}}{26,67} = 15 \cdot 10^{-3} (\text{s}) = 15 \text{ ms}.$$



6.6. att. Shēma  $\tau$  aprēķināšanai.

### 6. Rezultātu tabula

Izvēlamies  $t$  vērtības diapazonā no 0 līdz  $4\tau$  un aprēķinām strāvas  $i_1$  vērtības šajos laika momentos:

$$i_1(t) = Ae^{-t/\tau} = 0,5e^{-t/\tau} + 4,5.$$

Aprēķina rezultāti apkopoti tabulā.

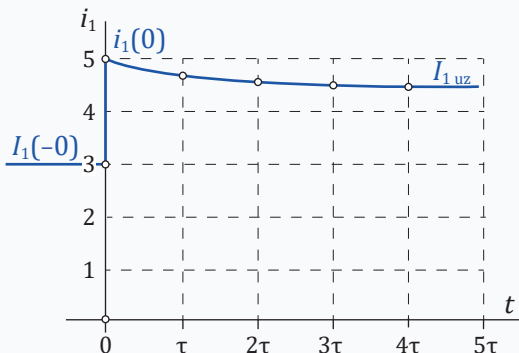
6.2. tabula

#### 6.1. piemēra aprēķina rezultāti

$t/\tau$	(-0)	0	1	2	3	4	$\infty$
$t, \text{ms}$	(-0)	0	15	30	45	60	$\infty$
$i_1(t), \text{A}$	0	5,00	4,68	4,57	4,52	4,51	4,50

### 7. Laika diagramma

Strāvas  $i_1$  vērtības laika diagrammai ņemtas no rezultātu tabulas (6.2. tab.). Diagrammā parāda arī aprēķināto strāvas vērtību pirms komutācijas  $I_1(-0)$ .

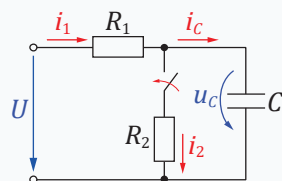


6.7. att. Strāvas  $i_1(t)$  laika diagramma.

## 6.2. piemērs

6.8. attēla shēmā kondensatoram  $C$  paralēli pieslēdz rezistoru  $R_2$ . Aprēķināt strāvas  $i_c$  izmaiņu pārejas procesa laikā un uzzīmēt šīs strāvas laika diagrammu.

Dots: līdzsprieguma vērtība  $U = 12 \text{ V}$ ; shēmas parametri:  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 30 \Omega$ ,  $C = 10 \mu\text{F}$ .



6.8. att. 6.2. piemēra shēma.

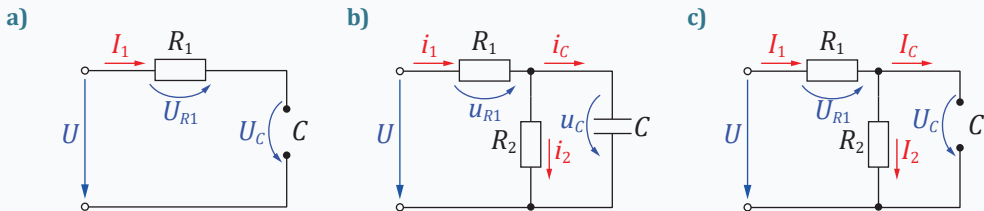
## Atrisinājums

### 1. Vērtības pirms komutācijas

Uzzīmējam shēmu pirms komutācijas (6.9.a att.). Saskaņā ar elementa  $C$  vienojumu līdzstrāvas ķēdē to aizstāj ar pārtraukumu. Pievienojam norādi uz režīmu:  $(-0)$ .

Saskaņā ar (2.4) meklējamā lieluma vērtība pirms komutācijas  $I_C(-0) = I_1(-0) = 0$  A. Komutācijas likums (6.8b) attiecas uz kondensatora spriegumu, tāpēc jāaprēķina arī tā vērtība pirms komutācijas  $U_C(-0)$ :

$$U_{R_1}(-0) = R_1 I_1(-0) = 0 \text{ V}; \quad U_C(-0) = U - U_{R_1}(-0) = 12 - 0 = 12 \text{ V}.$$



6.9. att. Shēma pirms komutācijas (a), pārejas procesa sākumā (b), uzspiestajā režīmā (c).

### 2. Sākumvērtības aprēķins

Uzzīmējam shēmu (6.9.b att.) pārejas procesa sākumam (kad  $t = 0$ ). To aprēķināt var tikai tāpēc, ka viena sprieguma vērtība ir zināma saskaņā ar komutācijas likumu (6.8b):

$$u_C(0) = U_C(-0) = 12 \text{ V}.$$

Šis spriegums pielikts arī rezistoram  $R_2$ . Atrodam strāvu tajā pēc (1.2):

$$i_2(0) = \frac{u_C(0)}{R_2} = \frac{12}{30} = 0,4 \text{ A}.$$

Atrodam spriegumu uz rezistora  $R_1$  pēc (1.5) un strāvu tajā:

$$u_{R_1}(0) = U - u_C(0) = 12 - 12 = 0 \text{ V}; \quad i_1(0) = \frac{u_{R_1}(0)}{R_1} = 0 \text{ A}.$$

Beidzot varam atrast meklējamo  $i_C$  sākumvērtību (1.6):

$$i_C(0) = i_1(0) - i_2(0) = 0 - 0,4 = -0,4 \text{ A}.$$

### 3. Uzspiestā vērtība

Uzzīmējam shēmu pēc komutācijas (6.9.c att.). Kapacitīvais elements  $C$  jāaizstāj ar pārtraukumu. Strāvu un spriegumu apzīmējumiem pievienojam uzspiestā režīma indeksu "uz". Jāmeklē tikai prasītā lieluma uzspiestā vērtība. "Tabulas formula" (2.4) nosaka, ka strāva caur kondensatoru neplūst:  $I_{Cuz} = 0$  A.

#### 4. Pārejas procesa izteiksme

Pārejas procesa izteiksmi atrod pēc (6.2a) un (6.4) vai vienā paņēmienā pēc (6.5), zinot strāvas  $i_c$  sākumvērtību un uzspiesto vērtību:

$$i_c(t) = [i_c(0) - I_{Cuz}]e^{-t/\tau} + I_{Cuz} = (-0,4 - 0)e^{-t/\tau} + 0 = -0,4e^{-t/\tau}.$$

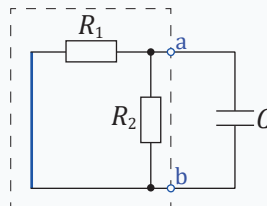
#### 5. Laika konstante $\tau$

Shēmās ar kapacitīvu elementu laika konstanti nosaka formula (6.7):  $\tau = RC$ .

Shēmā pēc komutācijas avotu aizstāj ar vadu un nosaka **ekvivalento pretestību**  $R$  attiecībā pret kapacitīvā elementa izvadiem a un b. Pretestības  $R_1$  ar  $R_2$  ir slēgtas paralēli, un ekvivalentā pretestība:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12 \Omega.$$

$$\tau = RC = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 120 \cdot 10^{-6} \text{ (s)} = 0,12 \text{ ms}.$$



6.10. att. Shēma  $\tau$  aprēķināšanai.

#### 6. Rezultātu tabula

Izvēlamies  $t$  vērtības diapazonā no 0 līdz  $4\tau$  un aprēķinām 4. punktā iegūtās strāvas izteiksmes vērtības. Rezultāti apkopoti 6.3. tabulā. Tajā parādītas arī vērtības pirms komutācijas un uzspiestās vērtības.

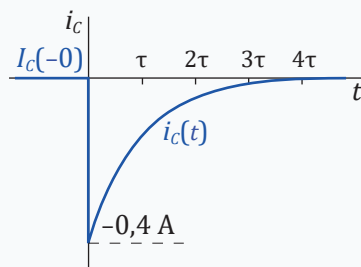
6.3. tabula

#### 6.2. piemēra aprēķina rezultāti

$t/\tau$	(-0)	0	1	2	3	4	$\infty$
$t, \text{ms}$	(-0)	0,00	0,12	0,24	0,36	0,48	$\infty$
$i_c(t), \text{A}$	0	-0,40	-0,15	-0,05	-0,02	-0,01	0

#### 7. Laika diagramma

Strāvas  $i_c$  laika diagramma zīmēta saskaņā ar rezultātu tabulu (6.3. tab.). Pirms komutācijas un pēc pārejas procesa strāva caur kondensatoru neplūst (2.4). Komutācijas brīdī strāva ar lēcieni izmainās līdz vērtībai  $i_c(0) = -0,4 \text{ A}$  un samazinoties plūst pretēji shēmā ar bultiņu norādītajam virzienam.



6.11. att. Strāvas  $i_c(t)$  laika diagramma.

## Pārejas procesu piemēri $RL$ un $RC$ ķēdēs

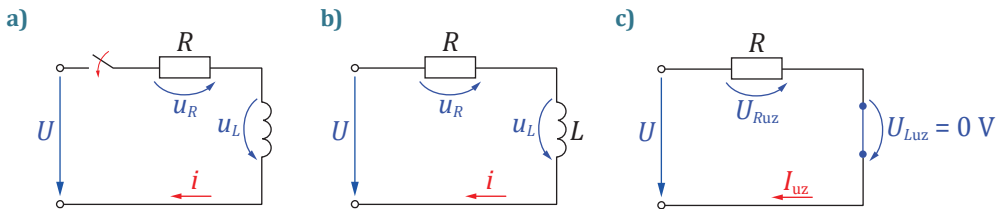
### Induktivitātes spoles pieslēgšana līdzsprieguma avotam

Aplūkosim pārejas procesu 6.12.a attēla shēmā. Līdzsprieguma avotam  $U$  pieslēdz ķēdi ar virknē slēgtiem elementiem  $R$  un  $L$ . Atradīsim visu shēmas lielumu izteiksmes un laika diagrammas bez skaitlisko vērtību aprēķina.

Komutācijas likums šeit attiecas uz induktīvā elementa  $L$  strāvu  $i$ . Tāpēc vispirms atrodam šīs strāvas izteiksmi.

- Pirms komutācijas** avots ir atslēgts, tāpēc spriegumu un strāvas vērtības pirms komutācijas ir vienādas ar nulli:

$$I(-0) = 0 \text{ A}, \quad U_R(-0) = 0 \text{ V}, \quad U_L(-0) = 0 \text{ V}.$$



6.12. att. Pieslēdzamā  $RL$  ķēde (a), pārejas procesa shēma (b), uzspiestā režīma shēma (c).

- Pārejas process** notiek shēmā pēc komutācijas (6.12.b att.).

Aplūkosim shēmu pārejas procesa sākumā (kad  $t = 0$  s). Saskaņā ar komutācijas likumu strāva spolē (šeit  $i$ ) saglabā savu vērtību, kāda bija pirms komutācijas:

$$i(0) = I(-0) = 0 \text{ A}.$$

- Uzspiestajā režīmā** (6.12.c att.) induktīvo elementu  $L$  aizstāj ar savienotājvadu. Atrod strāvas uzspiesto vērtību  $I_{uz}$  (2.2):

$$I_{uz} = \frac{U}{R}.$$

- Nosakām integrācijas konstanti pēc (6.4):

$$A = i(0) - I_{uz} = 0 - \frac{U}{R} = -\frac{U}{R}.$$

- Strāvas  $i(t)$  pārejas procesa izteiksme pēc (6.2a):

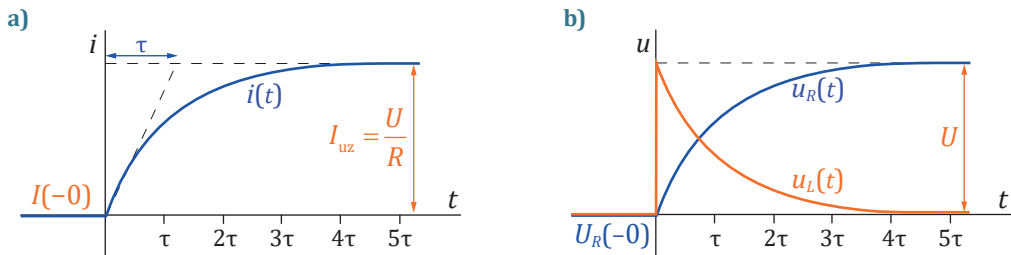
$$i(t) = Ae^{-t/\tau} + I_{uz} = -\frac{U}{R}e^{-t/\tau} + \frac{U}{R} = \frac{U}{R(1 - e^{-t/\tau})}.$$

- Izmantojam  $RL$  ķēdes laika konstantes  $\tau$  formulu (6.6):  $\tau = L/R$ .

- Zinot strāvas  $i(t)$  izteiksmi, atrodam pārējo lielumu izteiksmes 6.12.b att. shēmā. Izmantotas formulas (1.2) un (1.5):

$$u_R(t) = Ri(t) = U(1 - e^{-t/\tau}), \quad u_L(t) = U - u_R(t) = Ue^{-t/\tau}.$$

8. Zīmējam strāvas un spriegumu laika diagrammas (6.13. att.).



6.13. att. Pārejas procesa strāvas laika diagramma (a), spriegumu laika diagramma (b).

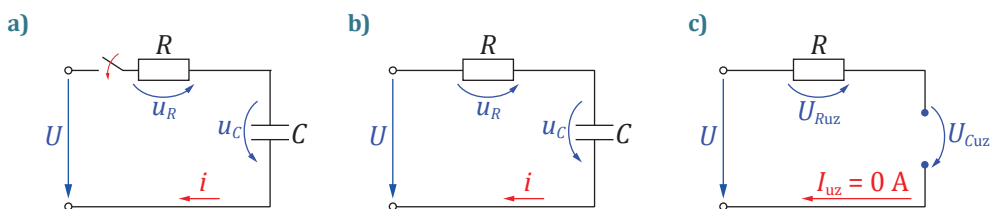
### Secinājumi

Pievienojot ķēdi ar  $RL$  virknes slēgumu līdzsprieguma avotam:

- strāva  $i$  pakāpeniski pieaug, sākot no nulles vērtības. Sākumā strāvas pieauguma ātrums ir vislielākais, bet vēlāk, tuvojoties uzspiestajai vērtībai  $U/R$ , tas samazinās;
- pārejas procesa ilgumu raksturo laika konstante  $\tau = L/R$ . Process notiek lēnāk, ja palielina  $L$  vai samazina  $R$ ;
- ievērojiet: augošai eksponentei pārejas procesa izteiksmē raksturīgs ir reizinātājs  $(1 - e^{-t/\tau})$ . Piemēram, strāvas  $i(t)$  grafikam 6.13.a attēlā. Dilstošai eksponentei – reizinātājs  $e^{-t/\tau}$ . Piemēram, sprieguma  $u_L(t)$  grafiks 6.13.b attēlā. Šīs divas eksponenšu izteiksmes pārejas procesu izteiksmēs (ne tikai elektrotehnikā) ir bieži sastopamas.

### Kondensatora uzlāde $RC$ ķēdē

Aplūkosim pārejas procesu 6.14.a attēla shēmā. Līdzsprieguma avotam pieslēdz virknē savienotu elementu  $R$  un  $C$ .



6.14. att.  $RC$  ķēde pirms komutācijas (a), shēma pārejas procesa analīzei (b), uzspiestā režīma shēma (c).

Zināms avota spriegums  $U$  un  $RC$  ķēdes parametri. Uzlādēts kondensators var ilgstoši saglabāt elektrisko lādiņu un spriegumu arī tad, ja avots ir atvienots, tāpēc kondensatora spriegumam pirms komutācijas jābūt zināmam. Dots, ka kondensators ir iepriekš izlādēts:  $U_C(-0) = 0 \text{ V}$ .

Pārejas procesa shēmā (6.14.b att.) komutācijas likums attiecas uz kondensatora spriegumu  $u_C$ . Vispirms atrodam šī sprieguma izteiksmi.



1. **Pirms komutācijas** kondensatora sprieguma vērtība dota:  $U_c(-0) = 0 \text{ V}$ .

2. **Pārejas process** notiek shēmā pēc komutācijas (6.14.b att.).

Saskaņā ar komutācijas likumu spriegums uz kondensatora pārejas procesa sākuma momentā  $t = 0 \text{ s}$  saglabā savu vērtību, kāda bija pirms komutācijas:

$$u_c(0) = U_c(-0) = 0 \text{ V}.$$

3. **Uzspiestajā režīmā** (6.14.c att.) kapacitīvu elementu aizstāj ar pārtraukumu, uzspiestās vērtības ir šādas:

$$I_{uz} = 0 \text{ A}, \quad U_{Ruz} = RI_{uz} = 0 \text{ V}, \quad U_{Cuz} = U - U_{Ruz} = U.$$

4. Nosakām integrācijas konstanti pēc (6.4):

$$A = u_c(0) - U_{Cuz} = 0 - U = -U.$$

5. Kondensatora sprieguma  $u_c(t)$  pārejas procesa izteiksme pēc (6.2a):

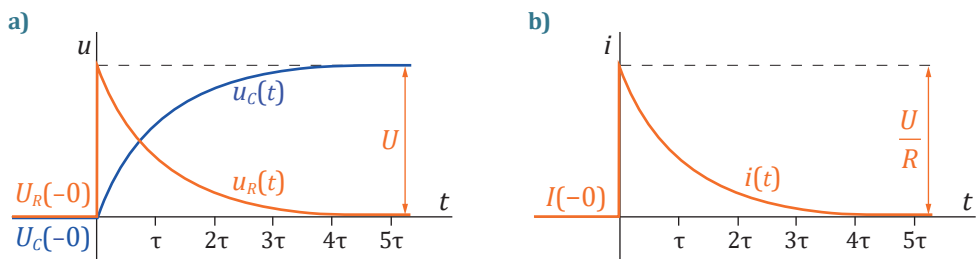
$$u_c(t) = Ae^{-t/\tau} + U_{Cuz} = -Ue^{-t/\tau} + U = U(1 - e^{-t/\tau}).$$

6. Izmantojam  $RC$  ķēdes laika konstantes  $\tau$  formulu (6.7):  $\tau = RC$ .

7. Zinot sprieguma  $u_c(t)$  izteiksmi, atrodam pārējo lielumu izteiksmes 6.13.b att. shēmā. Izmantota formula (1.2) un (1.5):

$$u_r(t) = U - u_c(t) = U - U(1 - e^{-t/\tau}) = Ue^{-t/\tau}, \quad i(t) = \frac{Ue^{-t/\tau}}{R} = \frac{U}{R}e^{-t/\tau}.$$

8. Zīmējam strāvas un spriegumu laika diagrammas (6.15. att.)



6.15. att. Kondensatora uzlādes spriegumu laika diagramma (a), strāvas laika diagramma (b).

### Secinājumi

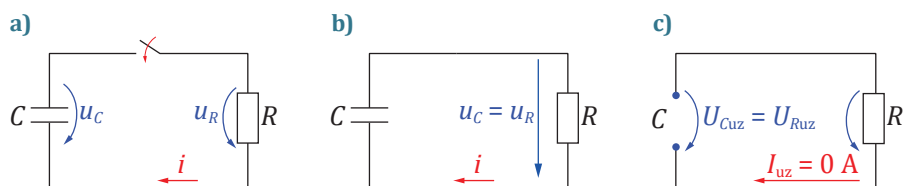
Pieslēdzot ķēdi ar virknē slēgtiem elementiem  $R$  un  $C$  līdzsprieguma avotam:

- spriegums  $u_c$  uz kondensatora pakāpeniski pieaug, sākot no nulles vērtības. Sākumā sprieguma izmaiņas ātrums ir vislielākais, bet vēlāk, tuvojoties uzspiestajai vērtībai  $U$ , spriegums pieaug arvien lēnāk;
- pārejas procesa ilgumu raksturo laika konstante  $\tau = RC$ . Tātad, palielinot jebkuru no parametriem ( $R$  vai  $C$ ), pārejas process noritēs lēnāk;
- kondensatora uzlādes strāva sākumā ir vislielākā, bet, spriegumu starpībai  $U - u_c = u_r$  samazinoties, arī uzlādes strāva pakāpeniski samazinās līdz nullei;

- pārejas procesa sākumā uz rezistīva elementa veidojas sprieguma impulss: spriegums  $u_R$  lēcienveidā pieaug līdz sprieguma  $U$  vērtībai.

### Kondensatora izlāde RC ķēdē

Shēmā (6.16.a att.) ar kondensatoru  $C$ , kas iepriekš uzlādēts līdz spriegumam  $U$ , noslēdz slēdzi. Sākas pārejas process, kura laikā kondensators pakāpeniski izlādējas.



6.16. att. Shēma pirms komutācijas (a), pārejas procesa laikā (b), pēc pārejas procesa (c).

1. Shēmā pirms komutācijas kondensatora sprieguma vērtība dota:  $U_C(-0) = U$ .
2. Pārejas procesa sākumā (6.16.b att.) kondensatora spriegums nevar mainīties ar lēcienu – saskaņā ar komutācijas likumu  $u_C(0) = U_C(-0) = U$ .
3. Pēc pārejas procesa (6.16.c att.) līdzstrāva caur kondensatoru neplūst (2.4):  $I_{uz} = 0$  A. Pēc (2.2) atrodam:

$$U_{Cuz} = U_{Ruz} = RI_{uz} = 0 \text{ V.}$$

4. Nosakām integrācijas konstanti pēc (6.4):

$$A = u_C(0) - U_{Cuz} = U - 0 = U.$$

5. Kondensatora sprieguma  $u_C(t)$  pārejas procesa izteiksme pēc (6.2a):

$$u_C(t) = u_R(t) = Ae^{-t/\tau} + U_{Cuz} = Ue^{-t/\tau} + 0 = Ue^{-t/\tau}.$$

6. Pamēģināsim sastādīt diferenciālvienādojumu 6.16.b attēla shēmai, lai pārbaudītu zināmo laika konstantes  $\tau$  izteiksmi (6.7). Izmantosim tabulas formulu (1.2) un (1.4):

$$u_C = u_R = Ri = -RC \frac{du_C}{dt}.$$

**Uzmanību!** Mīnusa zīme izteiksmē ir tādēļ, ka shēmā kondensatora sprieguma  $u_C$  un strāvas  $i$  pieņemtie pozitīvie virzieni nesakrīt. Atcerēsimies, ka elementu vienādojumi, tajā skaitā (1.4), ir definēti situācijai, kad sprieguma un strāvas virzieni sakrīt.

Izdalot vienādojuma abas puses ar  $RC$ , iegūstam diferenciālvienādojumu šādā formā:

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = 0.$$

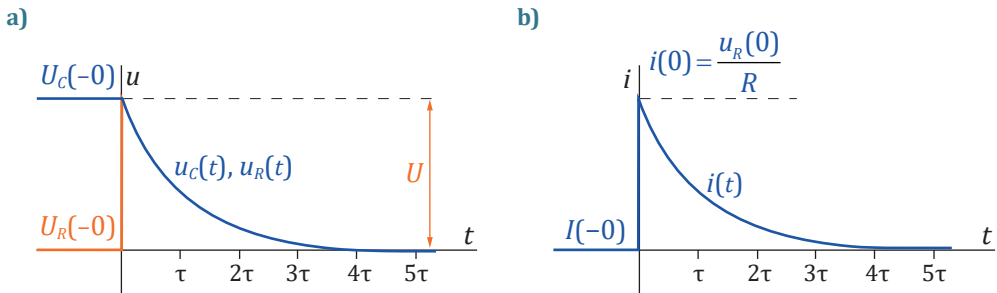
Salīdzinot iegūto izteiksmi ar (6.1a), varam saskatīt laika konstantes vērtību, kas arī šajā shēmā sakrīt ar (6.7):

$$\tau = RC.$$

7. Zinot sprieguma  $u_c(t) = u_R(t)$  izteiksmi, pēc formulas (1.2) atrodam strāvas  $i$  pārejas procesa izteiksmi (6.16.b att. shēmā):

$$i(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{U}{R e^{-t/\tau}}.$$

8. Izmantojot iegūtos rezultātus, zīmējam laika diagrammas (6.17. att.).



6.17. att. Kondensatora izlādes spriegumu laika diagramma (a), izlādes strāvas laika diagramma (b).

### Secinājumi

Uzlādētam kondensatoram pieslēdzot rezistoru:

- spriegums  $u_c$  uz kondensatora samazinās līdz nullei – sākumā strauji, pēc tam arvien lēnāk;
- pārejas procesa laika konstante  $\tau = RC$ . Palielinot jebkuru no parametriem ( $R$  vai  $C$ ), pārejas process norisināsies lēnāk;
- kondensatora izlādes strāva sākumā ir vislielākā, bet, spriegumam  $u_c = u_R$  samazinoties, arī strāva pakāpeniski samazinās līdz nullei;
- pārejas procesa sākumā spriegums uz rezistīva elementa  $u_R$  lēcienvēidīgi pieaug, kas nav pretrunā ar komutācijas likumiem.

### Līdzstrāvas ķēdes ar induktivitātes spoli pārtraukšana

Atslēdzot no avota vai vispār pārtraucot līdzstrāvas ķēdi, kurā ir induktivitātes spole (6.18.a att.), strāva samazināsies līdz nullei. Spolē inducējas EDS, kas ir proporcionāls strāvas samazināšanās ātrumam (1.3):

$$u_L = -e = L \frac{di}{dt}.$$

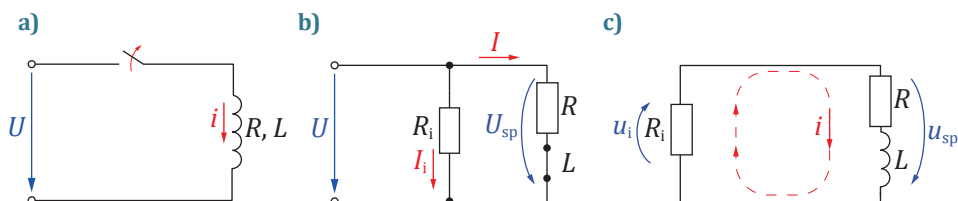
## Pārspriegumu samazināšana

Strāvas samazināšanās ātrums ( $di/dt$ ) nosaka spolē inducēto EDS. Strāvai samazinoties ļoti ātri, EDS var daudzkārt pārsniegt tīkla sprieguma  $U$  vērtību – ķēdē rodas pārspriegums.

Ja ķēdi izdotos pārtraukt momentāni, tad EDS vai spriegums uz induktīvā elementa būtu bezgalīgi liels. Taču tas pat teorētiski nav iespējams šādas pretrunas dēļ: saskaņā ar komutācijas likumu strāvai spolē pirmajā brīdī pēc komutācijas jā saglabā iepriekšējā vērtība, bet shēmā vairs nav noslēgta ceļa strāvai! Tāpēc ķēdi ar induktivitāti ātri atslēgt neizdodas. Ķēdē izveidojies pārspriegums jonizē telpu starp atslēdzamā slēdža poliem, kā rezultātā rodas elektriskais loks, caur kuru vēl zināmu laiku strāva turpina plūst.

Atslēdzot līdzstrāvas ķēdi ar induktīviem elementiem, pārspriegums varētu bojāt spoles izolāciju. Nevēlama būtu arī elektriskā loka izraisīta kontaktu apdegšana. Viena no vēsturiski pirmajām iespējām samazināt pārspriegumu ir šāda: paralēli spolei ( $R, L$  aizvietošanas shēmā 6.17.b att.) slēdz t. s. izlādes pretestību  $R_i$ .

No vienas puses, izlādes pretestības vērtībai jābūt pietiekami lielai, lai samazinātu tajā ilgstoši plūstošas strāvas  $I_i$  radītos jaudas zudumus ( $R_i I_i^2$ ). Novērtēsim, kādas būtu sekas, ja izlādes pretestība  $R_i$  būtu lielāka par spoles aktīvo pretestību  $R$  ( $R_i/R > 1$ ).



6.18. att. Nekorekts uzdevums (a), shēma pirms komutācijas ar izlādes pretestību  $R_i$  (b), aizvietošanas shēma (c).

## Pārejas procesa analīze

Pārejas procesa analīze 6.18.a attēla shēmā būtu matemātiski nekorekts uzdevums, jo slēdzi atslēgt momentāni nav iespējams. Tā vietā atradīsim, kas notiek, atslēdzot 6.18.b attēlā parādīto shēmu.

1. Nosakām vērtības pirms komutācijas. 6.18.b attēlā spoles induktivitāte  $L$  aizstāta ar vadu. Spolē plūstošās līdzstrāvas  $I$  vērtību nosaka spoles pretestība  $R$  un avota spriegums  $U$ :

$$I(-0) = \frac{U}{R}, \quad U_{sp}(-0) = U.$$

2. Strāva spolē  $i$  pakļaujas komutācijas likumam, un pārejas procesa sākumā (shēma 6.18.c att.,  $t = 0$  s) tā saglabā savu vērtību, kāda bija pirms komutācijas:

$$i(0) = I(-0) = \frac{U}{R}.$$

3. Atrodam spoles sprieguma  $U_{sp}$  sākumvērtību:

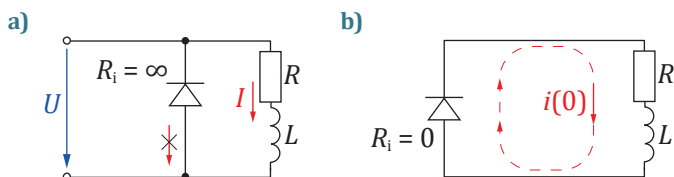
$$u_{sp}(0) = -u_l(0) = -R_i i(0) = -\frac{R_i U}{R} = -\frac{UR_i}{R}.$$

Tātad spriegums uz spoles ( $R, L$ ) pirmajā brīdī pēc spoles atslēgšanas ar lēcienu mainās līdz negatīvai vērtībai. Šis spriegums var pārsniegt tīkla spriegumu  $U$ , ja izlādes pretestība  $R_i$  pārsniegs spoles pretestības  $R$  vērtību. Tas liek samazināt izlādes pretestības vērtību, taču tad pirms komutācijas tajā plūdis relatīvi liela strāva, kas nebūtu ekonomiski.

### Shēma ar izlādes diodi

Mūsdienās vairs nav jārisina problēma, kādu izlādes pretestības vērtību izvēlēties – lielu vai mazu. Atrasts asprātīgs risinājums: paralēli spolei slēdz nevis rezistoru, bet pusvadītājdiodi, turklāt ar 6.19.a attēlā parādīto polaritāti. Pirms komutācijas (6.19.a att.) strāvas  $I$  virzienu nosaka avota sprieguma  $U$  polaritāte, taču strāva caur diodi **sprovstvirzienā** (no katoda uz anodu) neplūst. Pēc slēdža atslēgšanas (6.19.b att.) strāva  $i$ , tās vērtībai pakāpeniski samazinoties līdz nullei, turpina plūst caur diodi **caurlaides virzienā** (no anoda uz katodu), kurā tās pretestība ir niecīga.

Tātad stacionārā režīmā strāva caur diodi neplūst un jaudas zudumus tajā neizraisa. Ieguvums ir arī tas, ka pārejas procesā uz spoles nav pārsprieguma, jo sprieguma vērtība uz atvērtas diodes ir tuva nullei.



6.19. att. Shēma ar izlādes diodi pirms komutācijas (a), shēma pārejas procesa sākumā (b).

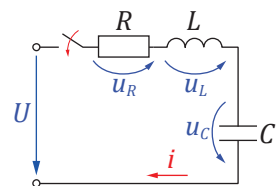
### Pārejas procesi RLC ķēdēs

Noslēgumā aplūkosim no analīzes viedokļa sarežģītāku pārejas procesu. Ja ķēdē ir divi enerģijas uzkrājēji (spole un kondensators), tad pārejas procesu apraksta otrās kārtas diferenciālvienādojums.

Līdzsprieguma avotam pieslēdz 6.20. attēlā parādīto shēmu ar sākumā neuzlādētu kondensatoru:  $U_c(-0) = 0$  V. Noskaidrosim, ar ko kondensatora uzlāde RLC ķēdē principiāli atšķiras no iepriekš aplūkotās kondensatora uzlādes RC ķēdē.

**Pirms komutācijas**, kad avots vēl nav pieslēgts, visas strāvas un spriegumi vienādi ar nulli:

$$I(-0) = 0, \quad U_R(-0) = 0, \quad U_L(-0) = 0, \quad U_C(-0) = 0.$$



6.20. att. RLC ķēdi pieslēdz līdzspriegumam.

**Uzspiestās vērtības** pēc pārejas procesa nosaka apstākļi, ka līdzstrāva caur kondensatoru neplūst. Tāpēc sprieguma kritums uz rezistora  $R$  (2.2) ir nulle, savukārt

spriegums uz induktīvā elementa  $L$  līdzstrāvas stacionārā režīmā (2.3) vienmēr ir nulle. Tāpēc pārejas procesa beigās kondensators būs uzlādēts līdz spriegumam  $U$ . Izmantojot "tabulas formulas" (2.2), (2.3) un (2.5):

$$I_{uz} = 0, U_{Ruz} = RI_{uz} = 0, U_{Luz} = 0, U_{Cuz} = U - U_{Ruz} - U_{Luz} = U.$$

Otrās kārtas diferenciālvienādojums un tā saknes

**Sastādīsim diferenciālvienādojumu** shēmai pēc komutācijas attiecībā pret spriegumu  $u_c$ . Spriegumu vienādojumā (1.5) spriegumus uz elementiem  $R$  un  $L$  aizstājam, izmantojot elementu vienādojumus (1.2) un (1.3):

$$U = u_R + u_L + u_c = Ri + L \frac{di}{dt} + u_c.$$

Izslēdzam no vienādojuma arī strāvu  $i$ , izmantojot elementa  $C$  vienādojumu (1.4) un pēc pārveidojuma iegūstam diferenciālvienādojumu:

$$U = RC \frac{du_c}{dt} + LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c,$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{LC} = \frac{U}{LC}. \quad (6.9)$$

Tas ir otrās kārtas nehomogēns diferenciālvienādojums, kura raksturīgais vienādojums:

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Raksturīgajam vienādojumam ir divas saknes:

$$p_{1,2} = \frac{-R}{2L} \pm \sqrt{\left[\frac{R}{2L}\right]^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (6.10)$$

Ja zemsaknes izteiksme ir pozitīva, tad raksturīgajam vienādojumam ir divas reālas saknes. Atrisinājums tad ir divu eksponenšu summa, pārejas process ir **aperiodisks** līdzīgi pārejas procesiem  $RC$  ķēdēs.

Ja zemsaknes izteiksme ir negatīva, tad vienādojuma saknes ir kompleksi saistīti skaitļi. Atrisinājumā parādās rimstošas sinusoidālas **svārstības**.

Pie zināmas pretestības  $R$  vērtības zemsaknes izteiksme ir vienāda ar nulli. Šo vērtību sauc par ķēdes **kritisko pretestību**  $R_{kr}$ , un tādā gadījumā saka, ka pārejas procesam iestājas kristiskais režīms. Atradīsim kritiskās pretestības vērtību:

$$\frac{R_{kr}}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow R_{kr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (6.11)$$

## Aperiodisks režīms

Ja  $\alpha > \omega_0$ , tad abas vienādojuma saknes (6.10) ir reālas un kondensatora uzlādes process ir aperiodisks – tas notiek bez svārstībām. Aperiodisks režīms parasti rodas ķēdēs ar relatīvi lielu aktīvo pretestību  $R$ , ja tā pārsniedz ķēdes **kritiskās pretestības** vērtību.

Diferenciālvienādojuma atrisinājumu meklē formā:

$$u_c = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + U. \quad (6.12)$$

Aperiodiskā procesā spriegums uz kondensatora pieaug līdz avota sprieguma vērtībai, nepārsniedzot to. Laika diagrammas raksturs (6.21.b att.) ir līdzīgs procesam  $RC$  ķēdē (6.15.a att.). Nelielas atšķirības procesa sākumā nosaka tas, ka sprieguma izteiksmē (6.12) ir nevis eksponente, bet divu eksponenšu summa. Ja  $RC$  ķēdē izmaiņas ir visstraujākās pārejas procesa sākumā, tad  $RLC$  ķēdē spriegums  $u_c(t)$  pašā sākumā pieaug lēnāk – tā grafikam ir pārliekuma punkts.

Vienādojumā (6.12) ir divas nezināmas konstantes  $A_1$  un  $A_2$ . Lai tās noteiktu, ir vajadzīgs vēl viens vienādojums. Izmantojot elementa vienādojumu (1.4), uzraksta strāvas izteiksmi, kas arī satur abas konstantes:

$$i = C \frac{du_c}{dt} = C(p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}). \quad (6.13)$$

Nepieciešami arī divi sākumnosacījumi – izmanto abus komutācijas likumus: attiecībā uz kondensatora spriegumu  $u_c$  un strāvu  $i$  induktīvajā elementā. Abi šie lielumi pārejas procesa sākumā saglabā savas vērtības, kas pirms komutācijas, kamēr avots nav pieslēgts, ir vienādas ar nulli:

$$u_c(0) = U_c(-0) = 0, \quad i(0) = I(-0) = 0. \quad (6.14)$$

Diferenciālvienādojuma (6.9) atrisinājumu  $u_c(t)$  aperiodiskam režīmam iegūst, risinot vienādojumus (6.12) un (6.13) kopā ar sākumnosacījumiem (6.14). Konstantes  $A_1$  un  $A_2$  atrod, atrisinot vienādojumu (6.12) un (6.13) sistēmu pie  $t = 0$ , kad  $e^{p_1 t} = e^{p_2 t} = 1$ . Rezultātā iegūst kondensatora aperiodiskas uzlādes izteiksmi:

$$u_c(t) = U - U \frac{p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}}{p_2 - p_1}. \quad (6.15)$$

## Svārstību režīma pamatjēdzieni

Pārejas procesam ir svārstību raksturs, ja izteiksmē (6.10)  $\alpha < \omega_0$ , citiem vārdiem, ja aktīvās pretestības  $R$  vērtība ir mazāka par ķēdes kritisko pretestību (6.11). Tad raksturīgā vienādojuma saknes (6.10) ir kompleksi saistīti skaitļi un diferenciālvienādojuma (6.9) atrisinājumu meklē formā (6.16), kur brīvā komponente nozīmē rimstošu sinusoīdu.

$$u_c(t) = (A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t) e^{-\alpha t} + U. \quad (6.16)$$

Svārstību procesu raksturojošie lielumi ir: **rimšanas koeficients**  $\alpha$ , pašsvārstību leņķiskā frekvence  $\omega_0$ , svārstību procesa leņķiskā frekvence  $\omega$ . To izteiksmes izriet no vienādojuma (6.10):

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (6.17)$$

Salīdzinot eksponentes kāpinātāju  $(-\alpha t)$  vienādojumā (6.16) un kāpinātāju  $(-t/\tau)$   $RC$  ķēdes pārejas procesa izteiksmē (6.2a), redzam, ka laika konstantei  $\tau$  atbilst rimšanas koeficientam apgriezts lielums  $1/\alpha$  (abu šo lielumu mērvienība ir sekunde). Svārstību process beidzas aptuveni pēc laika  $4/\alpha = 4 \cdot 2L/R$ . Tad spriegums  $u_c$  gandrīz sasniedz uzspiesto vērtību  $U$  un svārstību amplitūda nepārsniedz  $0,02U$ .

Svārstību procesa **leņķiskā frekvence**  $\omega$  ir svārstību skaits sekundē (frekvence  $f$ ), pareizināts ar sinusoidas fāzes izmaiņu vienā svārstību periodā ( $2\pi$ ). To lieto svārstību perioda aprēķināšanai pēc (3.0.1):

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T, \quad T = 2\pi/\omega. \quad (6.18)$$

Ja  $R = 0$ , tad  $\alpha = 0$  un svārstības ir nerimstošas. Nerimstošu svārstību (**pašsvārstību**) **leņķiskā frekvence** ir  $\omega_0$  un pašsvārstību periods izriet no (6.10) un (6.18):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (6.19)$$

### Svārstību režīma diferenciālvienādojuma atrisinājums

Diferenciālvienādojuma (6.9) atrisinājumu meklē formā (6.16). Divu integrācijas konstanšu atrašanai pievieno otru vienādojumu – strāvai  $i(t)$  kondensatora sprieguma izteiksmi ievieto kapacitīvā elementa vienādojumā (1.4). Risinot vienādojumus kopā ar sākumnosacījumiem (6.14), iegūst diferenciālvienādojuma (6.9) atrisinājumu:

$$u_c = -\frac{U}{\omega\sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \sin \left[ \omega t + \arctg \left( \frac{\omega}{\alpha} \right) \right] + U. \quad (6.20)$$

Izteiksmes brīvā komponente ir sinusoida, kuras amplitūda samazinās, uz ko norāda eksponente ar negatīvu kāpinātāju  $e^{-\alpha t}$ . Rimšanas koeficientam apgrieztais lielums  $1/\alpha$  (tāpat kā laika konstantei  $\tau$   $RC$  ķēdēs tā mērvienība ir sekunde) ļauj novērtēt pārejas procesa ilgumu. Svārstību process beidzas apmēram pēc laika  $4/\alpha = 4 \cdot 2L/R$ . Uzspiestā komponente  $U$  ir kondensatora sprieguma vērtība pēc pārejas procesa.



## Svārstību režīma piemērs un laika diagramma

6.21. attēla laika diagrammas ilustrē pretestības  $R$  ietekmi uz pārejas procesa raksturu. Līdzsprieguma avotam, kura spriegums  $U = 12$  V, pieslēgta  $RLC$  ķēde, kuras kapacitāte  $C = 1 \mu\text{F}$  un induktivitāte  $L = 0,25$  H. Pārejas procesa laikā kondensators uzlādējas līdz avota sprieguma vērtībai.

Ja shēmā nebūtu pretestības ( $R = 0$ ), svārstības būtu nerimstošas. Noteiksim pašsvārstību periodu  $T_0$  (6.19):

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{0,25 \cdot 10^{-6}} = 3,14 \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

6.21.a attēlā parādīta pēc (6.20) aprēķinātā pārejas procesa laika diagramma režīmam, kad ķēdes pretestība ( $R = 210 \Omega$ ) ir ievērojami mazāka par **kritiskās pretestības** vērtību (6.11):

$$R_{\text{kr}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{0,25}{10^{-6}}} = 1000 \Omega.$$

Kondensatora uzlādei tad ir rimstošu svārstību raksturs. 6.21.a attēlā parādīts arī svārstību periods  $T$ . Perioda izteiksmē (6.18) ievieto  $\omega$  definīciju no vienādojuma (6.17):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{1/(LC) - [R/(2L)]^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{10^6/0,25 - (210/0,5)^2}} = 3,21 \cdot 10^{-3} \text{ s.} \quad (6.21)$$

Ilustrācijai neliela tabula svārstību perioda  $T$  un pārejas procesa ilguma ( $\approx 4/\alpha = 4 \cdot 2L/R$ ) vērtībām, kas aprēķinātas pēc (6.21) dažādām pretestības  $R$  vērtībām.

6.4. tabula

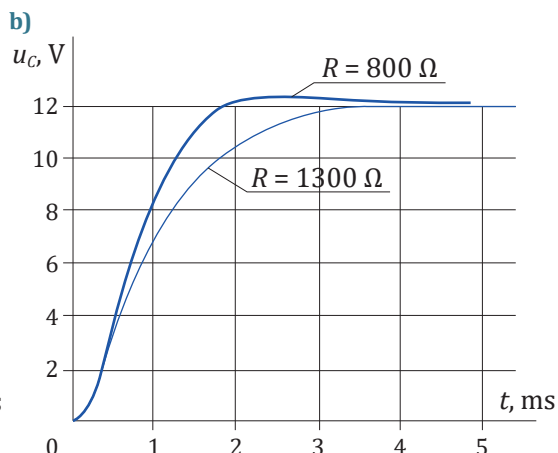
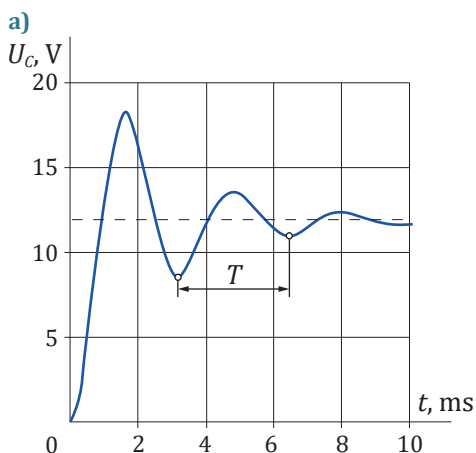
### Svārstību perioda un pārejas procesa ilguma vērtības ķēdei, kuras $L = 0,25$ H un $C = 1 \mu\text{F}$

$R, \Omega$	0	100	200	300	400	800	990	1000
$T, \text{ms}$	3,14	3,16	3,21	3,29	3,43	5,24	22,30	$\infty$
$4 \cdot 2L/R, \text{ms}$	$\infty$	20,00	10,00	4,00	5,00	2,50	2,04	0,00

Redzam, ka pie relatīvi mazām pretestības vērtībām ( $R < 0,2R_{\text{kr}}$ ) rimstošo svārstību periods  $T$  maz atšķiras no pašsvārstību perioda  $T_0$  vērtības (6.19).

Novērtējam, ka pārejas process beidzas pēc apmēram  $4/\alpha = 4 \cdot 2L/R \approx 10$  ms.

Palielinot pretestības vērtību, svārstību amplitūda samazinās. 6.21.b attēlā parādīta laika diagramma režīmam, kad pretestības vērtība  $R = 800 \Omega$  izvēlēta **nedaudz mazāka par ķēdes kritisko pretestību**. Kondensatora uzlādei joprojām ir (gan ļoti vāji izteikts) svārstību raksturs, jo spriegums uz kondensatora, kā redzams, zināmu laiku pārsniedz avota 12 V spriegumu. Otra līkne ir aprēķināta režīmam ar pretestības vērtību  $R = 1300 \Omega$  un rāda aperiodisku kondensatora uzlādes procesu.



6.21. att. Rimstošas svārstības ( $R = 210 \Omega$ ) (a), pirms kritiskā režīma ( $R = 800 \Omega$ ) un aperiodisks režīms ( $R = 1300 \Omega$ ) (b).

### Secinājumi

- Pārejas procesam ķēdē ar diviem enerģijas uzkrājējiem ( $L$  un  $C$ ) var būt aperiodisks vai rimstošu svārstību raksturs – atkarībā no parametru  $R$ ,  $L$  un  $C$  attiecības (6.10). Svārstību režīms ķēdē novērojams, ja pretestības  $R$  vērtības ir relatīvi mazas.
- Svārstību procesa ilgums atkarīgs no rimšanas koeficienta  $\alpha$  (6.17). Koeficientam  $1/\alpha$  ir tāda pati loma kā laika konstantei  $RC$  ķēdē: procesa ilgums ir aptuveni  $4/\alpha$ .



## Ievietojiet vispiemērotākos vārdus

1. Strāva ..... nekad, arī ..... procesa sākumā, nevar mainīties ar lēcieni.
2. Spriegums uz ..... komutācijas brīdī saglabā vērtību, kāda bija pirms komutācijas.
3. Palielinot induktivitātes vērtību, pārejas procesa ātrums  $RL$  ķēdē ..... .
4. Ja pretestības vērtība ir lielāka, pārejas process  $RC$  ķēdē notiek ..... .
5. Pārejas procesā  $RL$  ķēdē 95 % no izmaiņām notiek laika diapazonā, kas ir 4 reizes lielāks par ..... .
6. Aprēķinot pārejas procesu, izmanto ..... likumus.
7. Lai, atslēdzot  $RL$  ķēdi, novērstu pārspriegumu rašanos, paralēli ..... pieslēdz ..... .
8. Pārejas procesos  $RLC$  ķēdēs iespējami aperiodiski vai ..... režīmi.
9. Pārejas process  $RLC$  ķēdē kļūst aperiodisks, ja ..... pretestības vērtību.
10. Kritiskās pretestības vērtība kļūst 2 reizes lielāka, ja 4 reizes samazina ..... vērtību.

## Salīdziniet atbildes

1) spole, pārējas; 2) kondensatora; 3) samazinās; 4) lēnāk; 5) laika konstanti; 6) komutācijas; 7) spolei, diodi; 8) svārstību; 9) palielina; 10) kapacitātes.

# 1. PIELIKUMI

## 1. pielikums. Formulu tabula ar komentāriem.

Priekšvārdā dotā formulu tabula ar pirmajās 4 nodaļās izdarītajiem papildinājumiem:

	Momentānajām vērtībām	Līdzstrāvai	Vektoru diagrammu metode	Simboliskā metode
Elementu vienādojumi	$u = -e$	$U = -E$	$\bar{U} = -\bar{E}$	$\underline{U} = -\underline{E}$
	$u = Ri$	$U = RI$	$U = RI, \varphi = 0^\circ$	
	$u = L \frac{di}{dt}$	$U = 0$	$U = X_L I, \varphi = 90^\circ$	
	$i = C \frac{du}{dt}$	$I = 0$	$U = X_C I, \varphi = -90^\circ$	
	-	-	$U = ZI, \varphi$	
Spriegumu un strāvu vienādojumi	$u_{13} = u_{12} + u_{23}$	$U_{13} = U_{12} + U_{23}$	$\bar{U}_{13} = \bar{U}_{12} + \bar{U}_{23}$	$\underline{U}_{13} = \underline{U}_{12} + \underline{U}_{23}$
	$\sum \pm i = 0$	$\sum \pm I = 0$	$\sum \pm \bar{I} = 0$	$\sum \pm \underline{I} = 0$
	-	$\sum \pm E = \sum \pm RI$	-	$\sum \pm \underline{E} = \sum \pm \underline{Z}I$
Divpola jauda	$p = ui$	$P = UI$	$P = UI \cos \varphi$	$\underline{S} = \underline{U}I^* = P \pm jQ$
			$Q = UI \sin \varphi$	
			$S = UI$	

1. Formulas ailē "Momentānām vērtībām" lietojamas jebkurai lineārai ķēdei. Tās satur strāvu, spriegumu, EDS un jaudu momentānās vērtības ( $i, u, e, p$ ).
2. Formulas ailē "Līdzstrāvai" attiecas uz līdzstrāvas ķēdēm stacionārā režīmā. Tabulā nav parādītas ekvivalento pārveidojumu formulas (2.8), (2.9).
3. Formulas ailē "Vektoru diagrammu metode" lietojamas, analizējot sinusoidālas maiņstrāvas ķēdes ar vektoru diagrammu metodi. Apzīmējumi formulās:  $I, U$  – strāvu un spriegumu efektīvās vērtības,  $\bar{I}, \bar{U}, \bar{E}$  – strāvu, spriegumu un EDS sinusoīdu attēlojošie vektori;  $\varphi$  – fāžu nobīde starp elementa vai divpola spriegumu un strāvu;  $Z$  – virknes slēguma pilnā pretestība. Tabulā nav parādītas reaktīvo pretestību izteiksmes (3.3a), (3.4a).
4. Formulas ailē "Simboliskā metode" lietojamas, analizējot sinusoidālas maiņstrāvas ķēdes ar simbolisko metodi. Apzīmējumi formulās:  $I, \underline{U}, \underline{E}$  – strāvu, spriegumu un EDS attēlojošie kompleksie lielumi;  $\underline{Z}$  – kompleksā pretestība (4.0);  $\underline{S}$  – kompleksā jauda,  $I^*$  – kompleksās strāvas  $I$  saistītais kompleksais lielums (4.1.b att.).
5. Elementu vienādojumi ir sakarības starp spriegumu un strāvu (vai EDS) katram elementam ( $E, R, L$  un  $C$ ). Formulas ir spēkā, ja abu elektrisko lielumu pieņemtie virzieni shēmā sakrīt.

Maiņstrāvas ķēdēs arī jebkuru virknes slēgumu var raksturot līdzīgi – ar sakarību starp sprieguma un strāvas efektīvajām vērtībām ( $U, I$ ) un fāžu nobīdi  $\varphi$  starp strāvas un sprieguma sinusoīdām. Virknes slēgumam pilno pretestību  $Z$  un fāžu nobīdi  $\varphi$  atrod no pretestību trīsstūra (3.8a).

Lietojot simbolisko metodi, elementa  $R, L$  vai  $C$ , vai arī to virknes slēguma pretestība ir kompleksā pretestība  $Z$ .

6. Spriegumu vienādojumos indeksi 1, 2 un 3 ir brīvi izvēlētu shēmas punktu apzīmējumi.
7. Aprēķinot sarežģītākas ķēdes ar Kirhofa vienādojumu metodi, izmanto otro Kirhofa likumu shēmas kontūram: EDS algebriskā summa ir vienāda ar sprieguma kritumu ( $RI$  vai  $ZI$ ) algebrisko summu. EDS un strāvu zīmes vienādojumā nosaka, salīdzinot to bultiņu virzienus shēmā ar izvēlēto kontūra apejas virzienu.
8. Strāvu vienādojumus sastāda pēc pirmā Kirhofa likuma shēmas mezglu punktam: strāvu vērtību algebriskā summa mezglā ir vienāda ar nulli. Vienādojumā strāvas, kuru bultiņas vērstas apskatāmā mezgla virzienā, jāņem ar plusa zīmi.
9. Divpola jaudas formulās apzīmējumi ir šādi:  $p$  – momentānā jauda,  $P$  – aktīvā jauda,  $Q$  – reaktīvā jauda,  $S$  – pilnā (šķietamā) jauda. Ja strāvas un sprieguma pieņemtie pozitīvie virzieni shēmā sakrīt, tad formulas dod divpola patērēto jaudu. Kompleksās jaudas  $\underline{S}$  reālā daļa ir aktīvā jauda  $P$ , imaginārā daļa – reaktīvā jauda  $Q$ . Reaktīvās jaudas pozitīva vērtība nozīmē tās induktīvu raksturu.
10. Tabulā nav iekļautas ekvivalento pārveidojumu formulas. Līdzstrāvas ķēdēs tās ir (2.8), (2.9). Maiņstrāvas ķēdēs ar simbolisko metodi tam atbilst formulas (4.8) un (4.9). Vektoru diagrammu metode šos pārveidojumus neparedz.

## 2. pielikums. Uzdevumi ar atrisinājumiem

Nr.	Uzdevuma tēma (saturs)	Piemērs	Lpp.
<b>Līdzstrāvas ķēdes</b>			
1.	Divas vienkāršākās shēmas.....	-	37
2.	Shēmas ekvivalenta pārveidošana.....	2.1.	38
3.	Līdzstrāvas ķēde ar induktīvu elementu.....	2.2.	39
4.	Līdzstrāvas ķēde ar kapacitīvu elementu.....	2.3.	39, 40
5.	Tilta shēmas aprēķins. Pārveidojums trīsstūris-zvaigzne.....	2.4.	41, 42
6.	Kirhofa vienādojumu metode.....	2.5.	43, 44
7.	Mezglu sprieguma metode.....	2.6.	45, 46
8.	Jaudu bilances sastādīšana.....	2.7.	46, 47
9.	Ekvivalentā ģeneratora metode.....	2.8.	47-49
<b>Mainstrāvas ķēdes. Vektoru diagrammu metode</b>			
10.	Shēma ar vienu avotu, virknes slēgums.....	3.7.	77, 78
11.	Shēma ar vienu avotu, ar paralēliem zariem.....	3.8.	79-82
<b>Mainstrāvas ķēdes. Simboliskā metode</b>			
12.	Shēma ar vienu avotu, ar paralēliem zariem.....	4.3.	98-101
13.	Shēma ar vienu avotu, jaukts slēgums.....	4.4.	101-103
14.	Shēma ar vairākiem avotiem. Mezglu sprieguma metode.....	4.5.	103-105
<b>Trīsfāžu mainstrāvas ķēdes</b>			
15.	Simetrisks patērētājs zvaigznes slēgumā.....	5.1.	121, 122
16.	Simetrisks patērētājs trīsstūra slēgumā.....	5.2.	122, 123
17.	Nesimetrisks patērētājs zvaigznes slēgumā ar neitrāles vadu.....	5.4.	124-126
18.	Nesimetrisks patērētājs zvaigznes slēgumā bez neitrāles vada.....	5.5.	127-131
19.	Nesimetrisks patērētājs trīsstūra slēgumā.....	5.6.	131-134
20.	Nesimetrisks patērētājs trīsstūra slēgumā. Simboliskā metode....	5.7.	134, 135
<b>Pārejas procesi</b>			
21.	Pārejas process $RL$ ķēdē.....	6.1.	145-147
22.	Pārejas process $RC$ ķēdē.....	6.2.	147-148

### 3. pielikums. Metodes un algoritmi

Tabulā uzrādīti bieži lietoti paņēmieni, metodes un plāni: to saturs, lappuse, kur to atrast, kā arī uzdevumi, kuros algoritmi lietoti (piemēru numerācija – 2. pielikuma pirmajā kolonnā).

Nr.	Algoritma saturs	Lpp.	Uzdevumu numurs
1.	Ekvivalento pārveidojumu metode.....	37	2., 5., 13., 21.
2.	Elementi $L$ un $C$ līdzstrāvas ķēdē.....	39	3., 4., 21., 22.
3.	Kirhofa vienādojumu metode.....	43	6.
4.	Mezglu sprieguma metode.....	44	7., 14., 18.
5.	Jaudu bilances sastādīšana.....	46	8.
6.	Ekvivalentā ģeneratora metode.....	47	9.
7.	Sinusoidāla lieluma attēlošana ar vektoru.....	67	10., 11.
8.	Pretestību trīsstūra zīmēšana.....	68	11., 17., 19.
9.	Vektoru diagrammas zīmēšana.....	70	10., 11., 17., 19.
10.	Topogrāfiskās diagrammas zīmēšana.....	76	17., 19.
11.	Kompleksie elektriskie lielumi ( $E, U, I$ ).....	93	12.–14., 18., 20.
12.	Kompleksā pretestība $Z$ .....	94	12.–14., 18., 20.
13.	Mainstrāvas ķēžu analīze ar simbolisko metodi.....	98	12.–14., 18., 20.
14.	Trīsfāžu patērētāja analīzes plāns.....	111	17.–20.
15.	Pārejas procesa analīzes plāns.....	143	21., 22.
16.	Pārejas procesa laika konstante.....	145	21., 22.

## 4. pielikums. Vingrinājumi un piemēri

Nr.	Vingrinājumu un piemēru tēmas	Lpp.	Attēli
1.	Avota EDS un spriegums.....	13	1.4.
2.	Strāvu un spriegumu apzīmēšana shēmās .....	16, 17	1.5.
3.	Punkti, mezgli, zari un kontūri shēmās.....	19–21	1.7., 1.8.
4.	Virknes un paralēlslēgumi .....	21, 22	1.9.
5.	Spriegumu vienādojumu sastādīšana .....	23, 33	1.10., 2.2.
6.	Strāvu vienādojumu sastādīšana .....	24	1.11.
7.	Jēdziens par Kirhofa spriegumu vienādojumu.....	23, 24	2.2.
8.	Trīs populārāko formulu lietošana.....	27, 28	1.14.
9.	Posms ar īsslēgumu.....	39	2.7. b
10.	Sprieguma dalītājs.....	49	2.16.
11.	Līdzstrāvas tilts.....	50	2.17.
12.	Aktīva divpola režīmi .....	50–53	2.18.–2.20.
13.	Fāžu nobīdes jēdziens .....	57	3.2.
14.	Sinusoidas efektīvā vērtība.....	58	3.4.
15.	Sinusoidāla lieluma attēlošana ar vektoru .....	60–62	3.6.
16.	Vektoru diagrammas zīmēšana .....	67–68	3.8.
17.	Pretestību trīsstūra zīmēšana.....	70	3.10., 3.13.
18.	Vektoru diagrammu zīmēšanas piemēri.....	71, 72	3.11.–3.13.
19.	Aktīvās un reaktīvās komponentes .....	72, 73, 81	3.14., 3.21.
20.	Jaudu trīsstūris .....	74	3.15.
21.	Topogrāfiskās diagrammas zīmēšana.....	75	3.18.
22.	Aktīvās jaudas mērīšana .....	82, 83, 120, 121	3.22., 5.14.
23.	Induktīvas spoles parametri .....	83	3.23.
24.	Spriegumu rezonanse.....	84–86	3.24.–3.26.
25.	Jaudas koeficienta uzlabošana.....	86–89	3.28.–3.31.
26.	Darbības ar kompleksajiem skaitļiem.....	91–93	4.1.
27.	Kompleksā pretestība.....	94	4.2.
28.	Trīsfāžu ģenerators topogrāfiskā diagramma .....	108, 109	5.2.
29.	Strāvas trīsfāžu pārvades līnijā.....	109, 110	5.4.
30.	Trīs tipiskas patērētāja diagrammas .....	113	5.5.
31.	Pārejas procesa laika diagrammas piemērs.....	138	6.1.
32.	Pārejas procesa laika konstante .....	139, 140	6.2.
32.	Induktīvas spoles pieslēgšana līdzspriegumam.....	150, 151	6.11., 6.12.
33.	Kondensatora uzlāde un izlāde .....	151–154	6.13.–6.16.
34.	Induktīvas spoles atslēgšana .....	154–156	6.17.–6.19.
35.	Pārejas procesi <i>RLC</i> ķēdēs.....	156–161	6.20., 6.21.



# Pēcvārda vietā

Šajā grāmatā sastopams gandrīz pustūkstotis formulu. Lai lasītājam palīdzētu vieglāk orientēties šajā biezoknī, par ceļvedi izvēlēta formula tabula. No tās septiņiem pamatvienādojumiem tad arī izriet viss pārējais. Mēģināšu paskaidrot, kāpēc disciplīnas “Elektriskās ķēdes” tradicionālās metodikās izvēlētais ceļš nesekmē šādu sistēmisku pieeju.

## Kirhofa likumu priekšteči

Elektrisko ķēžu teorija aizsākās 19. gadsimta četrdesmitajos gados, kad vācu fiziķis G. Kirhofs (*Gustav Robert Kirchhoff*) publicēja oriģinālu metodi [1] strāvu aprēķinam sazarotās līdzstrāvas ķēdēs, piedāvājot divas kārtulas vienādojumu sastādīšanai, tagad pazīstamas kā pirmais Kirhofa likums – strāvām elektriskās ķēdes mezglā – un otrs Kirhofa likums – noslēgta elektriskās ķēdes kontūra elementu spriegumiem.

Eksistē divi mīti. Viens, ko apšaubīt uzdrošināsies retais, apgalvo, ka Kirhofa likumi ir elektrisko ķēžu pamatlikumi. Otrs, maz pazīstams, par Kirhofa likumu īsto autoru uzskata Gausu (*Johann Carl Friedrich Gauss*). Patiesībā pirmais no mītiem pārvērtē Kirhofa spriegumu vienādojuma lomu ārpus viņa izstrādātās elektrisko ķēžu aprēķina metodes, bet otrs savdabīgā veidā uzsver Gausa pētījumu lauka teorijā ietekmi uz elektrisko ķēžu teoriju.

Elektrisko ķēžu teorija neradās tukšā vietā. Pārnesot Gausa un Vēbera (*Wilhelm Eduard Weber*) iegūtos rezultātus lauka teorijā uz daudz vienkāršāku jomu – elektrisko ķēžu struktūru –, iegūst divus principus strāvu un spriegumu vienādojumu sastādīšanai, ko jau pirms Kirhofa 1841. g. publikācijā lietoja Pogendorfs (*Johann Christian Poggendorff*).

Piemēram, strāvu vienādojumu var sastādīt noslēgtam apgabalam, ko ierobežo Gausa virsma jeb shēmas šķēlums. Kirhofa strāvu vienādojumu jeb pirmo Kirhofa likumu no tā iegūst, izvēloties šķēluma speciālgadījumu – shēmas mezglu.

Spriegumu vienādojumu sastādīšanai var lietot lauka teorijā pazīstamo potenciāla jēdzienu. Izmantojot sprieguma definīciju ar potenciālu starpību, iespējams (ja ir vēlēšanās) izveidot arī potenciālus nesaturošu spriegumu vienādojuma formulu. Kā redzēsim, ideja par šādu universālu spriegumu vienādojumu mācību grāmatās parādās tikai pēc pusotra gadsimta. Līdz tam autori sāk ar speciālgadījumu – otro Kirhofa likumu jeb spriegumu vienādojumu, kas derīgs tikai Kirhofa kontūram – noslēgtam kontūram, kurā izmanto visu tā elementu spriegumus. Sekas tam ir neparedzētas: citu spriegumu vienādojumu pamatošanai autoriem diemžēl nākas producēt jaunus Kirhofa likumus.

## Kas ir Kirhofa likumi

Visai interesantas monogrāfijas [5] autors Sanktpēterburgas profesors Gomojunovs (*К. К. ГОМОЮНОВ*), gan nebūdamas labās domās par fizikas mācību grāmatām (“kroplīgāk

izklāstītu materiālu par elektriskajām ķēdēm, kā tas redzams fizikas mācību grāmatās, grūti iedomāties”), pieraksta visām tām apgalvojumu, ka Kirhofa likumi ir “kārtulas, kas atvieglo strāvu aprēķinu sazarotās ķēdēs”. Taču labāk pateikt nav iespējams – tie tiešām domāti tikai strāvu aprēķinam! Tas, ka Kirhofa strāvu vienādojumam visplašākais lietojums ir ārpus Kirhofa vienādojumu metodes, nav pietiekams Kirhofa likumu pasludināšanai par elektrisko ķēžu pamatlikumiem: arī Kirhofa spriegumu vienādojums domāts tikai strāvu (nevis spriegumu) aprēķinam ar kontūra elementu spriegumu palīdzību. Kirhofa devums nav universāli strāvu un spriegumu vienādojumi, bet daudz praktiskāks – universāla sazarotu ķēžu aprēķinu metode ar diviem Kirhofa likumiem un algoritmu, kas minimizē aprēķinam nepieciešamo vienādojumu skaitu.

Kirhofa piedāvātais algoritms izrādījies visai efektīvs – derīgs arī sākotnēji neparedzētām ķēdēm un režīmiem. 19. gadsimta deviņdesmitajos gados divi britu fiziķi Kirhofa vienādojumus modificēja izmantošanai maiņstrāvas ķēdēs un pārejas procesos. Trešais barons Relejs (*Lord Rayleigh, John William Strutt*) formulēja Kirhofa likumus kompleksiem spriegumiem un strāvām: (4.5a) un (4.6). O. Hevisajds (*Oliver Heaviside*) modificēja tos operatoru formā (šajā grāmatā nav aplūkota). Kirhofa vienādojumu metode lietojama arī shēmās ar retāk sastopamiem elementiem – strāvas avotu un mijinduktivitāti. Dabiski, arī visām minētajām situācijām piemērotas Kirhofa likumu modifikācijas (nevis katrs strāvu vai spriegumu vienādojums!) pamatoti saglabā iepriekšējo nosaukumu – Kirhofa likumi.

## Par elektrisko ķēžu struktūras vienādojumiem

Vienkāršība skaidrojums nav netikums jau no Aristoteļa laikiem. Vēlāk 14. gadsimta filozofs Okams Viljams (*William of Ockham*) piedāvāja metodoloģisku principu, kas pazīstams ar nosaukumu “Okama asmens”, un ieteica izvēlēties vienkāršāko jebkuras teorijas skaidrojumu – jo mazāk postulātu, hipotēžu un aksiomu, jo patiesāka teorija. Alberts Einšteins to izteica apmēram šādi: “visu der vienkāršot, cik vien tas iespējams, bet ne vairāk”.

Tagad par to, kāds ir vismazākais mācību grāmatai nepieciešamais ķēžu struktūras vienādojumu skaits. Attiecībā uz strāvu vienādojumiem te ir tikai divas iespējas – strāvu vienādojums shēmas šķēlumam (jeb Gausa virsmai) un pirmais Kirhofa likums mezglam. Atliek vienīgi izšķirt, kurš no tiem izriet no otra. Skaidrs, ka strāvu pamatvienādojums attiecas uz šķēlumu, jo mezgls ir šķēluma speciālgadījums.

Tamlīdzīgi pietiktu ar diviem spriegumu vienādojumiem. Arī te jābūt spriegumu pamatvienādojumam (kā redzēsīm, tas nav apzināts), no kura izriet jebkurš spriegumu vienādojums – arī otrais Kirhofa likums.

Tātad pilnu pamatvienādojumu sarakstu varētu veidot elementu vienādojumi (atbilstoši elementu tipu skaitam), divi struktūras pamatvienādojumi un jaudas vienādojums. Abi Kirhofa likumi paliek ārpus saraksta, jo paredzēti īpašam mērķim – Kirhofa vienādojumu metodei. Vienādojumus formulējot strāvu, spriegumu un jaudas momentānajām vērtībām, no tiem iespējams iegūt arī vienādojumus līdzstrāvas un maiņstrāvas ķēdēm.

## Divdesmitā gadsimta pseidokirhofa likumi

Elektrotehnikas mācību literatūrā par elektrisko ķēžu struktūras pamatvienādojumiem diemžēl izvēlējas nevis universālus strāvu un spriegumu vienādojumus, bet to speciālgadījumu – Kirhofa likumus. Iespējams, to noteica apstākļi, ka strāvu vienādojumus gandrīz vienmēr sastāda mezgļam (nevis Gausa virsmai), un līdz ar pirmās Kirhofa likums (jāsaka, ka pamatoti) arī otrais Kirhofa likums (bez pamata) mācību grāmatās kļuva par elektrisko ķēžu pamatlikumiem. Šis neveiksmīgās izvēles dēļ nācās pārkāpt Okama asmens principu (neradīt bez vajadzības jaunus vienumus) un atpakaļceļš no Kirhofa likumiem līdz to faktiskajiem priekštečiem (tajā skaitā spriegumu vienādojumam punktu secībai) metodiskajai domai prasīja veselu pusotru gadsimtu un patiesībā vēl nav pabeigts.

Kā jau minēju, otrā Kirhofa likuma izteiksme (1.5a) domāta nevis spriegumu aprēķinam, bet apkalpo vienādojumu sistēmu strāvu aprēķinam. Otrais Kirhofa likums attiecas tikai uz Kirhofa kontūru. Apzīmējums “Kirhofa spriegumu vienādojums” ir informatīvs nekā “otrais Kirhofa likums”, jo neslēpj, ka iespējami un vajadzīgi arī citi (ne Kirhofa) spriegumu vienādojumu sastādīšanas principi.

Mācību grāmatu autoriem te ir izvēle. Viena iespēja ir formulēt tiem no pieredzes zināmu universālu spriegumu vienādojumu sastādīšanas principu arī lasītājam saprotami. Taču par tradīciju kļuvis cits ceļš – producēt pseidokirhofa likumus īpašām situācijām. Kad spriegumu vienādojumu nākas pamatot (ievērojiet, ka universāls spriegumu vienādojums nav apzināts!), autors vai nu atturas no komentāriem, vai izlīdzas ar potenciāla jēdzienu, vai, visbiežāk, rodas lieki “Kirhofa likumi” (virknes slēgumam, zaram ar EDS, atvērtam kontūram, kontūram ar pārtraukumiem un pat vispārinātais Oma likums – ar vai bez precīzi formulētiem lietošanas noteikumiem). Visi tie vislabāk novērojami neskaitāmās mācību grāmatās, apakšnodalā “Mezglu spriegumu metode”. Piedēvēt šādiem “likumiem” Kirhofa vārdu uz daļējas līdzības pamata ir aplami, jo tie ne tikai neizriet no īstajiem Kirhofa likumiem, bet tiem arī nav nekāda sakara ar Kirhofa vienādojumu metodes algoritmu.

Interesanti, ka pēdējos gadu desmitos, aplūkojot sarežģītākas shēmas ar elektronikas elementiem vai trīsfasu maiņstrāvas ķēdes, mācību grāmatas pienāk tuvu universālam spriegumu vienādojumam ar “Kirhofa spriegumu likumu iedomātam kontūram” [7]. Ja autori to apzinātos, tam būtu nevis nejaušas taisnošanās raksturs (“var arī tā”), bet goda vieta kopā ar īstajiem Kirhofa likumiem vai (labāk) pirms tiem, kā tas redzams grāmatās [3]–[6].

## Beidzot ir universāli struktūras vienādojumi!

Literatūrā izdevās atrast arī dažus piemērus, kad Gausa principi pārformulēti ar elektrisko ķēžu teorijas jēdzieniem (punkts, strāva, spriegums) un apzināti likti elektrisko ķēžu struktūras vienādojumu pamatā.

Kalifornijas Universitātes (Bērkli, ASV) profesoru grāmatā [3] spriegumu vienādojuma vienkāršākā forma izriet no sprieguma definīcijas. Vienu no shēmā izvēlētajiem trīs

punktiem ("0") uzskata par atskaites punktu ar nulles potenciālu. Atrodot divu pārējo punktu potenciālu starpību, iegūst formulu  $u_{12} = u_{10} - u_{20}$ , kas ir mūsu vienādojuma (1.5) analogs. Tagad redzu pamatojumu, kāpēc formulu tabulā var ievietot nevis (1.5'), bet (1.5) – pēdējā formula aizstāj sprieguma definīciju, neizmantojot tajā potenciālus. Minētajā grāmatā [3] no iegūtās formulas izriet otrs universāla spriegumu vienādojuma formulējums: "Jebkurai noslēgtai punktu secībai ķēdē (piemēram, 1-2-3-4-1) jebkurā laika momentā visu secīgu spriegumu summa ir vienāda ar nulli." Te redzams, ka punkti nav jāņem uz Kirhofa kontūra, bet tos shēmā var izvēlēties pilnīgi patvaļīgi. Mūsu vienādojums (1.5') ir praktiskāks, jo ārpus Kirhofa metodes spriegumu vienādojumu vienmēr lieto, lai noteiktu spriegumu ar vairāku citu spriegumu summu.

Citas, jau minētās monogrāfijas [5] autors turpina kritizēt Kirhofa likumu formulējumus, kas "ir tik arhaiski, ka tranzistoru ķēžu analīzei nav derīgi". Tam jāpiekrīt, gan norādot, ka Kirhofa likumu uzdevums ir cits – vienīgi strāvu aprēķins. Tranzistoru (un citu) ķēžu analīzei nepieciešamus universālus strāvu un spriegumu vienādojumus autors arī formulē, gan joprojām nevajadzīgi uzskatīdams tos par Kirhofa likumu modernizētu formu. Atļaušos brīvi citēt viņa Kirhofa spriegumu likumu kontūram: "Ja aplī vai daudzstūrī ar dažādas polaritātes spailēm savienoti vairāki sprieguma mēraparāti un to savienojumu vietas pievienotas brīvi izvēlētiem ķēdes punktiem, tad jebkurā laika momentā to rādījumu algebriskā summa izrādīsies vienāda ar nulli." Seko piemērs ar tranzistora starpelektrodu spriegumiem, kurā voltmetri aizstāti ar spriegumu bultiņām. Tas tiešām ir vairāk vai mazāk veiksmīgi formulēts universāls spriegumu likums tāpat kā (1.5'). Piemēram, otro Kirhofa likumu no tā iegūst, izvēloties Kirhofa kontūru ar visu kontūra elementu spriegumiem. Jāpiezīmē, ka literatūrā [3] un [5] īsto Kirhofa likumu (mezgla un Kirhofa kontūram) formulējumi neparādās, jo tajās elektrisko ķēžu aprēķina metodes vispār nav aplūkotas.

"Noslēgtā daudzstūra" jēdziens pārceļojis arī uz piecu sējumu mācību grāmatu [6]. Definīcija ir veiksmīgāka: "Uzskatot brīvi izvēlētus elektriskās ķēdes punktus par daudzstūra virsotnēm, Kirhofa spriegumu likums būs spēkā jebkuram noslēgtam kontūram, kas ietver daudzstūra virsotnes." Likums arī te ilustrēts ar spriegumu vienādojumu tranzistora kolektora ķēdei.

Vairākās interneta vietnēs tagad atrodams universāla spriegumu vienādojuma skaidrojums, kas acīmredzot ņemts no [4]. Vienādojums attiecas uz kontūru, kam nav jābūt reālam strāvas ceļam, tam vienīgi jābūt noslēgtam. Pievienotajos piemēros tas gan izmantots vienīgi sprieguma noteikšanai uz pārtraukuma nesazarotā ķēdē.

Arī piedāvātos universālos spriegumu vienādojumus, formulētus iedomātam kontūram vai punktu secībai, autori turpina dēvēt par Kirhofa likumiem. Joprojām neredzu tam pamatu – no īstajiem Kirhofa likumiem tie neizriet. Gluži otrādi: Kirhofa likumi ir vispārīgāku vienādojumu speciālgadījumi īpašam mērķim – strāvu aprēķinam ar Kirhofa vienādojumu metodi.

## Nedaudz par šīs grāmatas vēsturi

Septiņdesmito gadu sākumā, gatavojot “Elektrotehnikas un elektronikas” lekciju kursu RPI neelektrotehniskajām specialitātēm, apzinājos divus iemeslus, kuru dēļ šī disciplīna ir sarežģītāka nekā būtu pelnījusi. Pirmkārt, ja adaptācija jauna mācību priekšmeta specifikai (atcerēsimies kaut vai pāreju no skaitļiem uz to simboliskiem apzīmējumiem algebrā, pāreju no neorganiskās uz organisko ķīmiju ar struktūras formulām, rakstībai neatbilstošu izrunu angļu vai franču valodā utt.) vienmēr prasa zināmu laiku un piepūli iepriekšējo ieradumu pārvarēšanai, tad elektrotehnikā tādu jaunumu nav mazāk: jāsamierinās ne tikai ar nepieciešamību lietot elektriskās shēmas, bet arī ar to, ka te formulas eksistē tikai kopā ar attiecīgu shēmu un elektrisko lielumu apzīmējumiem tajā. Daļa studentu visu to ilgstoši nepieņem vai pat nepamana – tur arī meklējams cēlonis tam, ka elektrotehnika tiem var likties īsta ķīniešu ābece.

Otrs iemesls saistīts ar to, ka kursa eksaktā (vienādojumu) daļa atkārto tradicionālo aprakstošās daļas secību (līdzstrāvas ķēdes – maiņstrāvas ķēdes – pārejas procesi). Tad katrs pārejas posms no vienkāršākā uz sarežģītāko (teiksim, no līdzstrāvas uz maiņstrāvas ķēdēm) nav pārliciecināms: sākas “jauna elektrotehnika” ar jauniem (nereti pat noklusētiem) likumiem. Ja šī secība vēl attaisnojas (pareizāk, tā ir vienīgā iespēja) vidējās izglītības jomā, tad augstskolas studenti ar iepriekšējosursos saņemtajām zināšanām fizikā un matemātikā pelnījuši sistēmisku kursa organizāciju, sākot ar universāliem, visām lineārām elektriskām ķēdēm derīgiem vienādojumiem un to lietošanas noteikumiem.

Ievērojot minēto, plānoju kursa struktūru ar sākumā dotu nelielu vienādojumu skaitu (elementu un shēmas struktūras vienādojumi) kopā ar to lietošanas principiem, ar iespēju to visu izplatīt uz pārējo kursu. Tādējādi hieroglifu (proti, vienādojumu) skaits būtu neliels, padarot minēto ābeci brīvu no tās orientālā nosaukuma.

Izvēloties vienādojumus formulu tabulai, nekādus sarežģījumus nerādīja elementu vienādojumi (1.1)–(1.4) un jaudu vienādojums (1.7). Piemērots izrādījās arī Kirhofa strāvu vienādojums mezglam (1.6), kas gan nav universāls, taču ar nepieciešamību lietot tā vispārīgāku formu – Gausa virsmai vai šķēlumam – jāstapopas reti.

Negaidīti problēmas radās ar spriegumu vienādojumu. Kirhofa spriegumu vienādojums (otrais Kirhofa likums) piemērots tikai vienai konfigurācijai – noslēgtam kontūram ar visiem tā elementu spriegumiem, jo iecerēts nevis spriegumu aprēķināt, bet ir palīglīdzeklis strāvu aprēķināt. Kur ņemt universālu spriegumu vienādojumu? Zināju, ka pieredzējušie kolēģi te izlīdzas ar potenciāla jēdzienu. Diemžēl pieņemtajā elektrisko lielumu (strāva, spriegums, jauda) sistēmā potenciāla jēdziens ir lieks. Atcerējos, ka studiju gados nepieciešamības spiests (jo domāju, ka vajadzīgo lekciju būšu izlaidis) izdomāju kaut ko līdzīgu (1.5) vai (1.5'). Formulu tabulai izvēlējos īsāko formu (1.5). Daudz vēlāk izrādījās, ka tam ir arī nopietnāks pamatojums – tā atbilst sprieguma definīcijai, neizmantojot potenciālus.

Jāatzīmē piedāvātā spriegumu vienādojuma (1.5) īpatnības. Pirmkārt, atteicos no kontūra jēdziena vienādojumā – ārpus Kirhofa vienādojumu metodes tas ir lieks. Otrkārt, lietošanai formulā atļāvos definēt katram elektrīķim pazīstamu jēdzienu

“punkts”, un izmantot to kā vienu no ķēžu topoloģijas pamatjēdzieniem, neraugoties uz to, ka padomju un, kā vēlāk pārlicinājos, arī postpadomju mācību literatūra līdz pat šai dienai piemin tikai ar Kirhofa likumiem saistītos topoloģijas jēdzienus (mezgls, zars, kontūrs). Starp citu, vēlāk ar gandarījumu pārlicinājos, ka praktiski neviena no līdzīgai tematikai veltītām Eiropas un ASV elektrotehnikas mācību grāmatām bez punkta jēdziena, protams, neiztiek.

Šāda pieeja atļāva izveidot elektrisko ķēžu vienādojumu sistēmu tabulas veidā ar septiņām rindām un četrām kolonnām. No pirmās kolonnas “Momentānām vērtībām” formulām izriet visi pārējie vienādojumi. Otrās kolonnas vienādojumi attiecas uz līdzstrāvas ķēdēm, trešā – uz vektoru diagrammu metodi, kas piemērota nesazarotu un vienkāršāko sazaroto vienfāzes maiņstrāvas ķēžu un pat vienkāršāko trīsfāžu maiņstrāvas ķēžu analīzei. Ceturtajā kolonnā – vienādojumi jebkuras maiņstrāvas ķēdes analīzei ar simbolisko metodi.

Pārlicinājies dažu semestru laikā par vienādojumu tabulas noderīgumu lektora darbā, sapratu, ka tā var būt piemērota arī studentiem un no tiem nebūt nav jāslēpj.

Vienādojumu tabulu vēlāk (1982. g.) popularizēju publikācijā „lektrotehnikas uzdevumu risināšanas metodika” [2], kur tā likta pamatā elektrisko ķēžu teorijas jautājumu izklāstam, pievienojot uzdevumu tipu risināšanas algoritmus un aprēķina piemērus. Šo koncepciju vēlāk izmantoju RTU Elektrotehnikas un elektronikas katedras metodiskajā publikācijā “Elektriskās ķēdes un to vienādojumi” (1999. g.), kur minētajam saturam pievienoti ar laboratorijas darbu tematiku saistīti teorijas jautājumi. Publikācija piedzīvojusi 2002. un 2009. g. uzlabotus un papildinātus izdevumus. Vienu no versijām nezināms labvēlis ievietojis internetā.

Šajā grāmatā atrodams papildināts un metodiski uzlabots šo publikāciju saturs. Minēšu trīs no jauninājumiem. Pirmajā nodaļā parādītas piecas ar elektrisko shēmu lasīšanu saistītas profesionāliem pašsaprotamas lietas, ar kurām iesācējs parasti paliek neiepazīstināts. Visticamāk, ka tādu ir vairāk, taču tās pagaidām nav apzinātas. Trešajā nodaļā parādīts, kā maiņstrāvas ķēžu teorijas jēdzieni un principi (fāžu nobīdes, jaudas koeficients, vektoru diagrammu metode) loģiski izriet no trim matemātiskajām darbībām (atvasināšanas, reizināšanas un saskaitīšanas) ar sinusoidāli mainīgiem elektriskajiem lielumiem. Sestā nodaļa jau sākumā iepazīstina ar pirmās pakāpes diferenciālvienādojuma īpašībām, kas atļauj pirms konkrētu pārejas procesu analīzes dot vienkāršu algoritmu to aprēķinam.

Nobeigumā jautājums, ar kuru saskāros grāmatas tapšanas laikā. Man bija priekšstats, ka terminu “strāvas stiprums” teorētiskajā elektrotehnikā nelieto jau vairāk nekā 70 gadus tāpēc, ka tas ir vecmodīgs un akadēmiskai literatūrai par prastu. Taču izrādījās, ka pat elektrotehnikas pasniedzēju vidē ir atrodams uzskats, ka elektriskais lielums “strāva” (*current*) ir minētā termina vienkāršots aizstājējs. Nebija grūti literatūrā atrast, ka patiesībā “strāvas stiprums” (*amperage*) ir nevis **lielums**  $i = dq/dt$  (līdzstrāvas ķēdēs tā varētu būt), bet praktiski izmērāma **vērtība** – līdzstrāvas absolūtā vai maiņstrāvas efektīvā vērtība.

## Minētā literatūra

1. G. Kirchhoff. Gesammelte Abhandlungen, Leipzig, 1882.
2. Ē. Priednieks. Elektrotehnikas uzdevumu risināšanas metodika. RPI Izdevniecība, 1982.
3. L. O. Chua, C. A. Desoer, E. S. Kuh. Linear and Nonlinear Circuits, USA, McGraw-Hill Companies, 1987.
4. T. R. Kuphaldt. Lessons in Electric Circuits, Vol. 1 Direct Current, 2002, [www.ibiblio.org](http://www.ibiblio.org)
5. К. К. Гомоюнов. Транзисторные цепи, СПб, 2000.
6. А. М. Гоков, Е. А. Жидко. Основы электротехники и электроники, ч. 1, Харьков, ХНЭУ, 2006.
7. I. Dūmiņš. Elektrotehnikas teorētiskie pamati. 1. daļa. Stacionāri procesi lineārās elektriskās ķēdēs, RTU Izdevniecība, 2014.

# Priekšmetu rādītājs

- Aizvietošanas shēma, 12  
  elementu tipi, 13  
Avoti, 11, 13  
Aperiodisks režīms, 158  
Aprēķina metodes, 37  
  ekvivalento  
    pārveidojumu, 37  
  Kirhofa vienādojumu, 43  
  mezglu spriegumu, 44  
  ekvivalentā ģenerators,  
    47  
Darba režīmi, 50–53  
  tukšgaita, īsslēgums, 50  
  saskaņotais režīms, 52  
Divpols, 21, 25  
Efektīvā vērtība, 58  
Ekvivalenti pārveidojumi,  
35, 40, 97  
Elektriskie lielumi, 13, 14  
  apzīmēšana, 16, 27  
Elementu vienādojumi,  
17  
  līdzstrāvai, 31  
  maiņstrāvai, 95  
Energijas uzkrājēji, 13, 25,  
137  
Fāze  
  sinusoīdas, 56  
  trīsfāžu sistēmā, 108  
Fāžu nobīde, 57  
Fāžu spriegumi, 108  
Fāžu strāvas, 109  
Īsslēgums, 39, 50, 117  
Jauda, 13, 25, 74, 97  
  aktīvā, 64  
Jaudu bilance, 46  
  kompleksā formā 96  
Jaudas koeficients, 65  
  uzlabošana, 86  
Jaudas mērīšana, 120  
Kirhofa likumi, 23, 24, 33,  
34, 70, 96  
Komponentes, 79  
Komutācija, 137  
Komutācijas likumi, 143  
Laika diagramma, 56, 143  
Laika konstante, 139, 141,  
145  
Leņķiskā frekvence, 57,  
159  
Maiņstrāvas parametri  
  periods, frekvence, 57  
  amplitūdas vērtība, 58  
Neitrāle, neitrālvads, 108,  
110  
  neitrāles nobīde, 112  
Paralēlslēgums, 19, 23  
Pārejas procesi, 137–162  
Potenciāls, 13, 15  
Pretestība, 62, 94, 157  
  pretestību trīsstūris, 66  
Rezonanse, 84, 86  
Simboliskā metode, 91–97  
  kompleksā strāva, 93  
  kompleksā pretestība,  
    94  
  kompleksā jauda, 97  
Spriegumu vienādojumi,  
22  
  līdzstrāvai, 32  
  maiņstrāvai, 64  
  kompleksā formā 96  
Strāvu vienādojumi, 24,  
34, 64, 96  
Svārstību režīms, 158,  
160  
Topoloģiskie jēdzieni,  
18–21  
  punkts, mezgls, 20  
  zars, kontūrs, 21  
Topogrāfiskā diagramma,  
75  
Trīsfāžu sistēma, 108–111  
  pārvades līnija, 110  
Trīsfāžu ģenerators, 108  
  topogrāfiskā  
    diagramma, 109  
  spriegumi, 109  
Trīsfāžu patērētājs, 110  
  zvaigznes slēgumā, 110  
  trīsstūra slēgumā, 111  
  simetrisks, 111  
Trīsstūra slēgums, 40,  
111, 117  
Uzspiestais režīms, 138  
Vektoru diagrammu  
  metode, 62–70  
Virknas slēgums, 22, 62,  
94  
Zvaigznes slēgums, 40,  
111